

Hércules Alves de Oliveira Junior

**PARTÍCULAS INTERAGENTES E EFEITOS DE  
BORDAS EM BILHARES**

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador:  
Prof. Dr. Marcus Werner Beims

**Curitiba**

2012

Oliveira Junior, Hércules Alves de  
Partículas interagentes e efeitos de bordas em bilhares / Hércules  
Alves de Oliveira Junior. - Curitiba, 2012.  
98 f. : il., graf.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor  
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.  
Orientador: Marcus Werner Beims

1. Sistemas hamiltonianos. 2. Equações diferenciais. I. Beims, Marcus  
Werner. II. Título.

CDD 515.39

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DEFESA DE TESE DE DOUTORADO**

**TÍTULO: PARTÍCULAS INTERAGENTES E EFEITOS DE BORDAS  
EM BILHARES**

**HÉRCULES ALVES DE OLIVEIRA JUNIOR**

Em sessão pública iniciada à quatorze horas desta data, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu atribuir ao candidato o conceito global A

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. MARCUS WERNER BEIMS (Orientador/Presidente) (UFPR)	<u>Marcus W. B.</u>	<u>B</u>
Prof. RAUL VALLEJOS (CBPF)	<u>R. Vallejos</u>	<u>B</u>
Prof. EDSON DENIS LEONEL (UNESP-RIO CLARO)	<u>Edson Denis Leonel</u>	<u>A</u>
Prof. SERGIO ROBERTO LOPES (UFPR)	<u>Sergio Roberto Lopes</u>	<u>A</u>
Prof. MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ (UFPR)	<u>M. G. Eleutério da Luz</u>	<u>A</u>

Curitiba, 28 de fevereiro de 2012

Dedico esta tese a Estela (mãe), Hércules (in memorium, pai), a Rafael (irmão), Eloah (avó) e a Isadora (esposa), pelo apoio e amor recebido deles.  
Deus seja Louvado.

# Agradecimentos

Agradeço a Universidade Federal do Paraná (UFPR), ao departamento de Física e a pós-graduação em Física pela oportunidade.

Ao professor e amigo Dr. Marcus W. Beims, pela paciência e tolerância. Pelo exemplo de profissional e pessoa.

A minha esposa Isadora, que enfrenta os desafios impostos pela vida junto comigo. A ela, agradeço por toda paciência e compreensão nos momentos em que abdiquei do meu tempo junto a ela para dedicar-me aos estudos e construção do nosso futuro.

A minha mãe Estela, meu irmão Rafael e minha avó materna Eloah.

A Capes pelo suporte financeiro de agosto de 2009 a fevereiro de 2010.

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).



# RESUMO

Na natureza, potenciais físicos são suaves, mas a maioria dos trabalhos com bilhares usam potenciais rígidos como paredes. Neste contexto nós escolhemos um sistema consistindo de duas partículas clássicas interagentes num bilhar unidimensional (1D) e outro sistema com três partículas sobre um anel sem atrito. A dinâmica dos dois sistemas é analisada quando há a transição rígida para suave das paredes do bilhar. Nós queremos checar o comportamento de sistemas Hamiltonianos clássicos, pois estes sistemas podem apresentar regiões de movimento regular e caótico coexistindo no mesmo espaço de fases.

Para o sistema de duas partículas num bilhar 1D, encontramos expressões analíticas para a descrição do espaço real e tangente. Mostramos quais os parâmetros que influenciam no aparecimento de ilhas regulares no mar caótico. Simulações numéricas para o Expoente de Lyapunov máximo a tempo finito, obtido das expressões analíticas, mostram que parâmetros como a massa das partículas, força de interação e altura das paredes podem mudar completamente a dinâmica do sistema. Nas investigações numéricas, as suavidades das paredes são modeladas por  $n$  degraus, portanto qualquer potencial pode ser obtido.

Mostramos que a dinâmica de três partículas num anel é equivalente a uma partícula dentro de um bilhar triangular. A transição das paredes de suaves para rígidas é analisada através das seções de Poincaré do sistema. A coexistência dos comportamentos regular e caótico são observados quando modificamos as paredes e as razões de massas das partículas. Os resultados mostram que a função exponencial e a função erro são apropriadas para descrever as paredes suaves do bilhar.

-Palavras chaves: Bilhares, Paredes suaves, Partículas interagentes.

-Áreas de conhecimento: Sistemas complexos, Dinâmica não-linear.

# Abstract

Although in nature realistic physical potentials are soft, most of the work with billiards use hard potential walls. In this context we chose a system consisting of two classical interacting particles in a one-dimensional (1D) billiard and another system with three particles on a frictionless ring. The dynamics of the two systems is analyzed when there is hard-to-soft transition from the walls of the billiards. We want to check the behavior in classical Hamiltonian system. Hamiltonian systems present motion coexist in the same phase space.

For the system of two-particle in a 1D billiards we find analytical expressions for the real space and the tangent space. We show what parameters influence the appearance of islands in a sea of chaos. Numerical simulations for the maximum Finite Time Lyapunov exponent, obtained by the analytical expressions. We show which parameters such as particle mass, strength of interaction and height of the walls can completely change the dynamics of the system. In the numerical investigation, the soft walls are modeled by  $n$  steps, therefore any potential can be modeled.

We show that the dynamics of three particles on a ring is equivalent to a particle within a triangular billiard. The transition from soft to hard walls is analyzed by the Poincare Surfaces of Section of the system. The behavior of the coexistence of regular and chaotic regions are observed when modifying the walls and particles masses ratio. The results show that the exponential function and error function are appropriate to describe the soft walls of the billiards.

-Keywords: Billiards, Soft walls, Interacting particles.

-Knowledge area: Complex systems, Nonlinear dynamics.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>17</b>
2.1	Sistemas Hamiltonianos . . . . .	18
2.1.1	Noções Básicas . . . . .	18
2.1.2	Constantes de movimento . . . . .	19
2.1.3	Sistemas Integráveis . . . . .	19
2.1.4	Caos . . . . .	20
2.2	Seção de Poincaré . . . . .	21
2.3	Teorema KAM . . . . .	23
2.4	Expoente de Lyapunov . . . . .	26
2.5	Bilhares . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Duas partículas num bilhar unidimensional</b>	<b>37</b>
3.1	Resultados analíticos . . . . .	38
3.1.1	Dinâmica de partículas não-interagentes colidindo com vários potenciais degrau . . . . .	38
3.1.2	Dinâmica de partículas não-interagentes no espaço tangente . . . . .	46
3.1.3	Expoentes de Lyapunov para partículas interagentes . . . . .	51
3.2	Resultados numéricos . . . . .	56
3.3	Discussão dos resultados . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Três partículas num anel</b>	<b>72</b>
4.1	Introdução ao bilhar triangular com paredes rígidas . . . . .	72
4.2	Resultados . . . . .	74
4.2.1	Bilhar Triangular com paredes suaves . . . . .	74

4.2.2	Aplicação das Funções “Erro” e “Exponencial” . . . . .	77
4.2.3	Resultados numéricos - paredes suaves . . . . .	79
4.2.4	Aplicação das Funções “Erro” e “Exponencial” com paredes rígidas . . . . .	89
4.3	Discussão dos resultados . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação da Seção de Poincaré. Nesta figura o fluxo que representa a evolução do sistema, atravessa uma seção $\Omega$ em vários pontos, formando a seção de Poincaré.	22
2.2	Seção de Poincaré para um bilhar com duas partículas, cujas paredes são modeladas pela função erro. Ver referência [22]. . . . .	22
2.3	Representação do movimento sobre uma superfície toroidal. . . . .	23
2.4	Espaço de fases do mapa padrão, com $K = 0$ , caso integrável. Linhas com $p_{n+1}$ constante aparecem. . . . .	25
2.5	Espaço de fases do mapa padrão, com $K = 0,09$ . Este caso apresenta ilhas no espaço de fases. . . . .	25
2.6	Espaço de fases do mapa padrão, com $K = 0,18$ . Com o aumento da perturbação os toros são quebrados e surgem regiões caóticas representadas por pontos com comportamento irregular na figura. . . . .	26
2.7	Espaço de fases do mapa padrão, com $K = 0,45$ . Apenas algumas ilhas podem ser vistas nesta figura. Isso é consequência do aumento da perturbação no sistema.	27
2.8	Representação do bilhar Estádio de Bunimovich. . . . .	31
2.9	Em (A) um exemplo de uma órbita periódica de uma partícula num bilhar circular. Um exemplo de órbitas caóticas nos bilhares (B) Sinai e (C) Pascalian Snail. . .	32
2.10	Representação do bilhar Cogumelo. Figura retirada de [48] . . . . .	32
2.11	Representação do bilhar de círculos concêntricos. Um círculo como borda externa do bilhar e um disco fixo deslocado do centro. . . . .	33
2.12	Distribuição dos Expoentes de Lyapunov Máximos a tempo finito da Figura retirada de [22]. Em (a) temos o bilhar com paredes rígidas, e em (b) o caso de paredes quase rígidas. A curva em azul representa o expoente de Lyapunov máximo a tempo finito de maior probabilidade de ocorrência. Os pontos abaixo desta curva aparecem devido as armadilhas dinâmicas no espaço de fases. . . . .	35
3.1	Bilhar com paredes suaves construído com a função erro. Esta figura mostra a mudança das paredes conforme é modificado o parâmetro de suavidade. Paredes suaves para $\sigma = 0,3$ , paredes quase-rígidas para $\sigma = 0,09$ e paredes rígidas para $\sigma = 0,005$ . . . . .	38

3.2	Aproximação das paredes do bilhar suave em degraus. . . . .	38
3.3	Aproximação do potencial suave em degraus. Em (A) potencial com apenas um degrau e 5 colisões. Em (B) representação de $n$ degraus. . . . .	41
3.4	Potenciais gerados pelas forças constantes $F^\pm = 1, 0$ dentro do bilhar. . . . .	56
3.5	Seção de Poincaré para 70 trajetórias (em preto), $F = 0, 3$ , $V_0 = 0$ . Aqui as paredes estão posicionadas em $-1, 0$ e $1, 0$ . Em azul temos uma trajetória regular vista na figura (3.6). Os pontos em vermelho representam uma trajetória caótica vista na figura (3.8). . . . .	57
3.6	Trajetoária periódica em função do tempo. Em vermelho temos a partícula 1 e em preto a 2. As colisões ocorrem quando as duas linhas se encontram. . . . .	58
3.7	(a) Trajetória periódica em função do tempo. Em vermelho temos a partícula 1 e em preto a 2. Em (b) apenas a trajetória da partícula 2. (c) Trajetória da partícula 1 tirada de (a). . . . .	58
3.8	Trajetoária caótica em função do tempo. Em vermelho temos a partícula 1 e em preto a 2. As colisões ocorrem quando as duas linhas se encontram. . . . .	59
3.9	Ampliação da Seção de Poincaré da figura (3.5). Em destaque está o ponto Hiperbólico e dois pontos Elípticos. . . . .	59
3.10	Seção de Poincaré para 150 trajetórias, $F = 0, 3$ , $V_0 = 0, 05$ . Pode-se observar o aparecimento de regiões proibidas perto de $p_1 = 0$ e $q_1 = \pm 0, 8$ . . . . .	60
3.11	Seção de Poincaré para 150 trajetórias, $F = 0, 3$ , $V_0 = 0, 1$ . Pode-se observar o aumento das regiões proibidas no espaço de fases. . . . .	61
3.12	Seção de Poincaré para 150 trajetórias, $F = 0, 5$ , $V_0 = 0, 1$ . . . . .	62
3.13	Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão $F$ . Parede com um degrau com altura $V_0 = 0, 1$ e massa $1, 0 \leq m_2 \leq 3, 0$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em $m_1 = 1, 0$ . . . . .	63
3.14	Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão $F$ . Ampliação da região $2, 7 \leq m_2 \leq 3, 0$ da figura (3.12). Caso de um degrau com $V_0 = 0, 1$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em $m_1 = 1, 0$ . . . . .	64
3.15	Seção de Poincaré para $m_2 = 2, 1$ , força de repulsão $F = 1, 0$ para um degrau com $V_0 = 0, 1$ . . . . .	65
3.16	Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão $F$ . Caso de dois degraus com $V_0 = V_1 = 0, 1$ , variando a massa de $1, 0 \leq m_2 \leq 3, 0$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em $m_1 = 1, 0$ . . . . .	66

3.17	Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão $F$ . Ampliação da figura (3.14). Bilhar com dois degraus, com $V_0 = V_1 = 0,1$ e massa de $1,0 \leq m_2 \leq 2$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em $m_1 = 1,0$ . . . . .	67
3.18	Expoentes de Lyapunov máximo para 3 degraus. Com $V_0 = V_1 = V_2 = 0,1$ e massa variando de $1,0$ até $3,0$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em $m_1 = 1,0$ . . . . .	68
3.19	Expoentes de Lyapunov máximo para 3 degraus. Com $V_0 = V_1 = V_2 = 0,1$ e massa variando de $1,0$ até $2,0$ . Ampliação da figura (3.18). A massa da partícula 1 é mantida constante em $m_1 = 1,0$ . No topo, a ampliação da figura (3.18) para variação de massa de $1,0$ até $2,0$ . A figura de baixo é a ampliação da figura (3.18) para variação de massa de $2,0$ até $3,0$ . . . . .	69
4.1	Representação de três partículas num anel em (a), em (b) uma partícula num bilhar triangular e em (c) duas partículas num bilhar unidimensional (caixa). . .	73
4.2	Figura esquemática dos Toros. $S_1$ representa um toro com um genus. $S_2$ representa um toro com dois genus e $S_3$ representa um toro com três genus. . . . .	74
4.3	Figura esquemática do bilhar triangular com paredes suaves. A figura mostra a parede (linha tracejada) que pode se mover. . . . .	77
4.4	Potencial das paredes do bilhar para a função exponencial (a esquerda), figuras (a) e (c), e da função erro (a direita), figuras (b) e (d), para o caso de massas iguais e suavidades iguais com $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$ e $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ . Aqui temos o caso de paredes suaves (no topo), figuras (a) e (b), para $L/\sigma_{31} = 5,0$ . O caso de paredes rígidas (abaixo), pode ser visto nas figuras (c) e (d), para $L/\sigma_{31} = 20,0$ . . . . .	80
4.5	Potencial das paredes do bilhar para a função exponencial (em (a) e (c)) e da função erro (em (b) e (d)), para o caso de suavidades iguais, com $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ e razão de massas iguais a $\gamma_{21} = 5,0$ , $\gamma_{31} = 1,0$ , $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ . As paredes suaves são apresentadas em (a) e (b) e as paredes rígidas em (c) e (d), para $L/\sigma_{31} = 5,0$ e $L/\sigma_{31} = 20,0$ , respectivamente. . . . .	81
4.6	Seção de Poincaré para a função exponencial, para o caso de massas iguais e suavidades iguais com $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$ e $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ . Aqui temos o caso suave para $L/\sigma_{31} = 5,0$ e 400 trajetórias. . . . .	82
4.7	Na figura (a) temos a seção de Poincaré para a função exponencial, a mesma da figura (4.6). Esta figura apresenta os pontos no espaço de fases (em vermelho) da trajetória ao lado (figura (b)). Em (c) e (d) temos a série temporal desta trajetória, para $x$ e $y$ em função do tempo, respectivamente. . . . .	83
4.8	Seção de Poincaré para a função erro, para o caso de massas iguais e suavidades iguais com $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$ e $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ . Aqui temos o caso suave para $L/\sigma_{31} = 5,0$ e 400 trajetórias. . . . .	84

4.9	Seção de Poincaré para a função erro, para o caso de massas iguais e suavidades iguais com $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1, 0$ e $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1, 0$ . Aqui temos o caso suave para $L/\sigma_{31} = 5, 0$ . Simulação de algumas trajetórias da figura (4.8). . . . .	84
4.10	Trajetoórias da partícula, dentro do bilhar, referentes a figura (4.9), mostrando as regiões de (I) a (V). . . . .	85
4.11	Série temporal para trajetória da figura (4.10-V). Caso de paredes suaves, com $L/\sigma_{31} = 5, 0$ e tempo de evolução de $t = 250$ , para $(x \times t)$ , em (a) e $(y \times t)$ , em (b). . . . .	86
4.12	Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função exponencial. Todas as figuras tem $L/\sigma_{31} = 5, 0$ e $\gamma_{31} = 1, 0$ . Na parte superior esquerda temos $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1, 0$ . Na parte superior direita temos a seção para $\gamma_{21} = 3, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/3, 0$ . Na parte inferior esquerda temos $\gamma_{21} = 5, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/5, 0$ . Na parte inferior direita temos $\gamma_{21} = 7, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/7, 0$ . . . . .	87
4.13	Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função erro. Todas as figuras tem $L/\sigma_{31} = 5, 0$ e $\gamma_{31} = 1, 0$ . Na parte superior esquerda temos $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1, 0$ . Na parte superior direita temos a seção para $\gamma_{21} = 3, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/3, 0$ . Na parte inferior esquerda temos $\gamma_{21} = 5, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/5, 0$ . Na parte inferior direita temos $\gamma_{21} = 7, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/7, 0$ . . . . .	88
4.14	Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função exponencial. Todas as figuras tem $L/\sigma_{31} = 5, 0$ e $\gamma_{31} = 1, 0$ . Na parte superior esquerda temos $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1, 0$ . Na parte superior direita temos a seção para $\gamma_{21} = 3, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/3, 0$ . Na parte inferior esquerda temos $\gamma_{21} = 5, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/5, 0$ . Na parte inferior direita temos $\gamma_{21} = 7, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/7, 0$ . . . . .	90
4.15	Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função erro. Todas as figuras tem $L/\sigma_{31} = 5, 0$ e $\gamma_{31} = 1, 0$ . Na parte superior esquerda temos $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1, 0$ . Na parte superior direita temos a seção para $\gamma_{21} = 3, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/3, 0$ . Na parte inferior esquerda temos $\gamma_{21} = 5, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/5, 0$ . Na parte inferior direita temos $\gamma_{21} = 7, 0$ , $\gamma_{32} = 1, 0/7, 0$ . . . . .	91

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas dinâmicos são objetos matemáticos usados para modelar fenômenos físicos cujos estados ou variáveis mudam ao longo do tempo. Estes modelos são utilizados em previsões econômicas e financeiras, modelagem ambiental, diagnósticos médicos, equipamentos industriais, e em uma série de outras aplicações.

Os sistemas dinâmicos podem ser divididos entre sistemas dissipativos, que variam a sua energia ao longo do tempo e sistemas Hamiltonianos que mantêm sua energia constante [1]. Os sistemas Hamiltonianos possuem relevantes aplicações em astronomia, como no estudo de galáxias, fluidos incompressíveis, e linhas de campo magnético em confinamento de plasma [2]. Apesar da relevância e de ao longo do tempo estes problemas terem sido amplamente estudados, algumas questões ainda persistem.

Uma das principais distinções em sistemas dinâmicos é revelado nos comportamento dinâmicos, que podem variar de regular, movimento periódico ou quase-periódico, a movimento irregular ou caótico. Em sistemas Hamiltonianos esta distinção é extremamente relevante por tratar de inúmeros sistemas físicos reais. Exemplo de trajetória periódica aparece no problema bem conhecido de dois corpos de Kepler, onde as trajetórias são elipses fechadas, e na oscilação de um pêndulo simples. Movimento quase periódico aparece em sistemas de alta dimensão como uma composição linear de dois períodos de movimento incompressíveis. Trajetórias quase-periódicas nunca se fecham perfeitamente, mas constroem toros no espaço de fases. A existência do movimento caótico foi primeiramente vislumbrado por Henri Poincaré [3] no final do século XIX com o problema de três corpos. Trajetórias caóticas combinam imprevisibilidade e determinismo por mostrarem sensibilidade a condições iniciais, onde trajetórias próximas, bem conhecidas, divergem exponencialmente ao longo do tempo.

A grande maioria dos sistemas Hamiltonianos apresentam uma característica peculiar, a de possuírem espaço de fases misto, onde movimento regular e caótico coexistem. Um exemplo desse comportamento pode ser observado em um modelo construído para explicar o movimento de galáxias, o sistema de Hénon-Heiles [4].

Fixando determinadas energias para o sistema e evoluindo-o no tempo, o comportamento dinâmico pode variar de integrável (regular) à caótico, passando pelo comportamento misto.

Modelos relativamente simples para verificar as características da dinâmica de sistemas Hamiltonianos, são os bilhares clássicos. Bilhares são modelos matemáticos que podem corresponder a sistemas físicos reais onde uma ou mais partículas se movem em região delimitada. A geometria do bilhar pode ser uma caixa, um círculo ou qualquer outra forma geométrica, e as partículas podem colidir elasticamente umas com as outras e com as paredes.

Uma partícula pontual movendo-se livremente sobre uma linha com bordas fixas é um exemplo de um bilhar integrável. O bilhar, chamado de bilhar de Sinai [5], onde uma partícula é posta a se movimentar numa geometria constituída de um quadrado com um disco fixo deslocado do centro, apresenta comportamento caótico. Em contrapartida o bilhar Estádio de Bunimovich [6] apresenta espaço de fases com regiões de movimento regular e caótico coexistindo.

A forma matemática mais simples de um bilhar é apresentada em uma dimensão. Mesmo com características simples o sistema pode apresentar dinâmica suficientemente complexa e de extrema relevância para sistemas dinâmicos [7]. Um sistema com duas partículas, interagindo via potencial de Coulomb, num bilhar unidimensional exibe comportamento misto no espaço de fases [8]. Quando este sistema varia sua interação, de longo para curto alcance através do potencial de Yukawa [9], o sistema mantém sua característica mista e apresenta trajetórias na região caótica que permanecem por um longo tempo próximo a regiões de movimento regular. Esse movimento é chamado de grude (*Stickiness em inglês*). O grude faz com que os expoentes de Lyapunov tenham seu valor positivo reduzido. Sabe-se que os grudes podem influenciar em propriedades globais do sistema, como fenômenos de transporte [10] e decaimento de correlação [11, 12]. Pode-se ainda utilizar a variância [13] dos expoentes de Lyapunov para este fim, ou a variação do expoente de Lyapunov máximo de maior probabilidade de ocorrência [9].

Alguns trabalhos descobriram que um bilhar unidimensional com duas partículas, pode ser tratado como um caso particular do movimento de três partículas num anel finito [14, 15, 16]. Também foi verificado que a dinâmica de duas partículas pode ser descrita pelo movimento de uma partícula num bilhar triangular [17]. Os bilhares triangulares têm sido usados no estudo da difusão de energia em sistemas unidimensionais [18].

Geralmente, trabalhos com bilhares consideram paredes rígidas como modelo [5, 6, 8, 19]. Entretanto, potenciais realísticos são suaves, como bilhares formados por semicondutores onde as partículas são elétrons [20, 21]. Nestes trabalhos a força de interação entre as paredes e as partículas é representada por uma função Delta ( $\delta(x)$ ), mas esta função não é definida para as equações de movimento do sistema por se tratarem de derivadas  $\left(\frac{d\delta(x)}{dx}\right)$ .



Surge então a pergunta: qual o efeito de potenciais suaves sobre a dinâmica de partículas interagentes? Neste contexto, recentemente um bilhar unidimensional com duas partículas clássicas interagindo via potencial de Coulomb com paredes suaves [22] foi apresentado. As paredes deste sistema foram descritas pela função “Erro”, de forma que a força de interação entre parede e partícula fosse uma função Gaussiana.

A suavidade das paredes do bilhar pode ser controlada através de um parâmetro “ $\sigma$ ”. Quando este parâmetro tende a zero ( $\sigma \rightarrow 0$ ) obtem-se paredes rígidas representadas por uma função Delta. Dessa forma o sistema apresenta a coexistência das regiões regulares e caóticas no espaço de fases, bem como a presença de *stickiness* para paredes suaves e rígidas. Quanto mais suaves são as paredes mais ilhas de regularidade podem ser verificadas.

No intuito de analisar a dinâmica de partículas interagentes, aprisionadas em bilhares com diferentes geometrias, quando as paredes do bilhar são suaves, estudamos o comportamento de dois bilhares diferentes. O primeiro problema apresenta duas partículas clássicas interagindo via forças de repulsão constantes ( $F$ ) entre si, confinadas num bilhar unidimensional com paredes suaves. As paredes são modeladas por degraus, com altura e largura variável, no intuito de obter qualquer função que descreva um potencial para as paredes, tanto rígido, quanto suave quando o número de degraus é grande.

Usando o método de Dellago *et al.* [23], uma extensão do método clássico desenvolvido por Benettin *et al.* [24] para o cálculo analítico do espectro dos expoentes de Lyapunov, encontramos expressões analíticas que fornecem a evolução do sistema no espaço de fases e no espaço tangente do bilhar. A evolução do sistema é descrita por matrizes  $(6 \times 6)$ , diferente do estudo feito por Dellago onde um sistema simples era modelado por matrizes  $(2 \times 2)$ . Através destas matrizes mostramos quais os termos analíticos podem gerar comportamento caótico no sistema. Utilizamos as expressões analíticas para calcular numericamente a dinâmica do sistema através dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito e das seções de Poincaré do sistema. Este método consiste em encontrar os Expoentes de Lyapunov do sistema através dos autovalores da matriz final obtida pela multiplicação das matrizes para diferentes regiões do bilhar. Este é um método alternativo para o cálculo dos Expoentes de Lyapunov dos usualmente utilizados para a evolução do sistema através de equações diferenciais como o Método de Wolf *et al.* [25].

No segundo trabalho temos o problema de três partículas sobre um anel. Através de uma transformação de coordenadas mostramos que este sistema pode ser descrito por uma partícula dentro de um bilhar triangular. Através do espaço de fases do sistema observamos a mudança de comportamento dinâmico quando as paredes variam de suaves para rígidas. Mostramos que dependendo da escolha dos potenciais que moldam as paredes, que vem do potencial de interação entre as partículas, o sistema pode apresentar comportamento caótico ou integrável. Também mostramos que existe uma relação entre o tamanho do bilhar e a suavidade das paredes. A

dinâmica do sistema muda quando alteramos as massas das partículas, que estão diretamente ligadas aos ângulos do bilhar triangular.

No capítulo 2 faremos uma introdução aos conceitos de Sistemas dinâmicos, Sistemas Hamiltonianos, Teorema KAM, Expoentes de Lyapunov e de Bilhares.

No capítulo 3 são apresentados os resultados analíticos e numéricos para duas partículas num bilhar unidimensional.

No capítulo 4 são apresentados os resultados analíticos e numéricos para três partículas num anel.

Por fim, no capítulo 5 faremos as conclusões finais sobre o trabalho, baseados em resultados obtidos nos capítulos anteriores.

## Capítulo 2

# Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo falaremos sobre alguns conceitos de sistemas dinâmicos, em especial dos sistemas Hamiltonianos. Revisaremos os conceitos sobre o teorema KAM (seção (2.3)), Seção de Poincaré (seção (2.2)), Expoentes de Lyapunov (seção (2.4)) e sistemas chamados de Bilhares na seção (2.5).

Um sistema dinâmico é descrito por qualquer conjunto de grandezas, chamadas de variáveis dependentes, que variam no tempo. O tempo é chamado de variável independente. O estado do sistema é representado pelos valores do conjunto completo de variáveis dependentes. O espaço de estados possíveis para um sistema é denominado *espaço de fases*. A evolução de tal sistema pode ser descrita por um conjunto de equações discretas, por meio de mapas, ou contínuas, através de equações diferenciais, permitindo-nos a descrição do comportamento do sistema conforme o tempo evolui. O sistema dinâmico, no qual o tempo é uma variável contínua, pode ser expresso por  $N$  equações diferenciais de primeira ordem autônomas [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = F_1[x_1, x_2, \dots, x_N], \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2[x_1, x_2, \dots, x_N], \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = F_N[x_1, x_2, \dots, x_N], \end{array} \right. \quad (2.1)$$

no qual podemos escrever em forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x}$ <sup>1</sup> é um vetor de dimensão  $N$  e a função  $\mathbf{F}$  define um *campo de velocidades* [26]. Para qualquer condição inicial do sistema  $\mathbf{x}(0)$  podemos, em princípio, resolver a equação (2.2) e obter o estado do sistema num tempo futuro.

---

<sup>1</sup>A notação vetorial desta tese se dará através do negrito, ou seja,  $\mathbf{x} = \vec{x}$  que é um vetor  $N$ -dimensional. Chamadas de coordenada de estado.

Para sistemas com tempo discreto, ou seja, tempo com valores inteiros, apresentamos um mapa escrito em forma vetorial e genérica

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_i), \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{x}_i$  possui dimensão  $N$ . Dado um estado inicial  $\mathbf{x}_0$ , podemos obter o estado no tempo  $i = 1$  por  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$ . Determinando  $\mathbf{x}_1$  podemos determinar o estado no tempo  $i = 2$  através de  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ , e assim os demais estados. Um sistema de tempo contínuo de dimensão  $N$  pode ser transformado num mapa de tempo discreto de dimensão  $N - 1$ , via técnica da Seção de Poincaré [1].

## 2.1 Sistemas Hamiltonianos

### 2.1.1 Noções Básicas

Um sistema Hamiltoniano com  $N$  graus de liberdade é um sistema dinâmico definido por uma função escalar  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  (chamado de Hamiltoniana) de  $2N$  pares de variáveis conjugadas  $(q_i, p_i)$ , no qual definem um espaço de fases  $\Gamma$ .  $q_i$  e  $p_i$  são as coordenadas e momentos generalizados das partículas. A dinâmica do sistema é definida pelas equações de movimento [1, 26]

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.4)$$

Aqui o ponto significa derivada temporal  $d/dt$ . Sistemas de tempo discreto, chamados de mapas, podem ser definidos de forma similar através de uma função geratriz  $F(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$  e pelas relações

$$\dot{\mathbf{q}}' = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}'}, \quad \dot{\mathbf{p}}' = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}'}. \quad (2.5)$$

A partir de uma perspectiva mais ampla, sistemas Hamiltonianos são sistemas dinâmicos *simpléticos*, o que significa que não apenas o volume macroscópico do espaço de fases é preservado (pelo Teorema de Liouville), mas também as áreas microscópicas. Para um mapa  $(\mathbf{q}', \mathbf{p}') = \mathbf{M}_N(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , a condição simplética é escrita como [1]

$$\mathbf{S}_N = \left( \frac{\partial \mathbf{M}_N}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{S}_N \left( \frac{\partial \mathbf{M}_N}{\partial \mathbf{x}} \right) = \mathbf{J}^T \mathbf{S}_N \mathbf{J}, \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{J} = \left( \frac{\partial \mathbf{M}_N}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left( \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right)$  é a matriz jacobiana,  $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ , o índice  $T$  indica a transposta, e

$$\mathbf{S}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

é a matriz simplética, composta da matriz identidade  $\mathbf{I}_N$  e matrizes nulas  $\mathbf{0}_N$  de ordem  $N$ . Propriedades particulares dos sistemas Hamiltonianos seguem as características simpléticas, ou seja:

- (i) não possuem atratores,
- (ii) para cada Expoente de Lyapunov existe outro com sinal oposto,
- (iii) se  $\lambda$  é um autovalor da matriz Jacobiana,  $1/\lambda$ ,  $\lambda^*$ ,  $1/\lambda^*$  também o são<sup>2</sup>. Esta última condição é especialmente restritiva no caso de mapas bidimensionais.

### 2.1.2 Constantes de movimento

Uma função  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  é uma constante de movimento, ou invariante de movimento, se

$$\frac{dF}{dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.8)$$

onde  $\{F, H\}$  representa os Parênteses de Poisson. Quando  $H$  e  $F$  não dependem do tempo  $t$  explicitamente,  $F$  é uma constante de movimento, se e somente se,  $\{F, H\} = 0$ .

A existência de constantes de movimento reduz a dimensão efetiva da dinâmica, isto é, se existem  $M$  invariantes de movimento, a dinâmica acontece numa variedade (em inglês *manifold*) com dimensão  $(2N - M) > 0$ . Pode-se encontrar, mais facilmente, as constantes de movimento se conseguirmos fazer uma transformação canônica de variáveis  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{I}, \theta)$  no sistema. As variáveis  $(\mathbf{I}, \theta)$  são chamadas de variáveis de ação-ângulo. Tais transformações preservam as características dos sistemas Hamiltonianos e são definidas através da função geratriz  $S(\mathbf{I}, \theta, t)$ , onde o Hamiltoniano pode ser escrito como

$$H(\mathbf{I}, \theta, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Sistemas Integráveis

Um sistema Hamiltoniano com  $N$  graus de liberdade, é dito integrável, ou completamente integrável, se existem  $N$  constantes de movimento independentes em involução [1, 27], isto é:

- (a)  $\{F_i, H\} = 0$ , para  $i = 1, \dots, N$ ;
- (b)  $\{F_i, F_j\} = 0$ , para  $i, j = 1, \dots, N$ ;
- (c) os vetores  $\nabla F$  são linearmente independentes em cada ponto do espaço de fases. Neste caso, o teorema de Liouville-Arnold (veja [26, 27, 28]) garante que uma transformação canônica  $S(\mathbf{I}, \theta, t)$  existe se a equação (2.9) for escrita como

---

<sup>2</sup>Aqui  $*$  representa o complexo conjugado.

$H(\mathbf{I}, \theta, t) = H(\mathbf{I})$ . Usando a equação (2.4), as equações de movimento podem ser escritas como

$$\mathbf{I} = \text{constante}, \quad \theta = \omega t, \quad (2.10)$$

onde  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$  é a frequência em função da ação e usualmente são mutuamente incomensuráveis. A equação (2.10) descreve um movimento quase-periódico sobre um toro de dimensão  $N$ .

## 2.1.4 Caos

O estudo do caos iniciou-se com Henri Poincaré entre 1886 e 1889, quando este elaborou soluções parciais para o problema de três corpos [3]. Nesse estudo, Poincaré tinha o intuito de explicar a estabilidade do sistema solar. Desde então, vários cientistas deparam-se com inúmeros problemas dos quais não se pode encontrar soluções exatas. Um sistema pode ser completamente regular (não exibe caos, também chamado de integrável) e ainda assim não possuir solução analítica explícita. É justamente o caso do pêndulo simples [29].

Na realidade, uma definição exata de caos torna-se bastante complicada devido à variedade e complexidade de sistemas existentes na natureza, mas como uma definição primária, e mais aceita, usaremos a proposta feita por R. L. Devaney em [30].

Um sistema dinâmico  $F : D \rightarrow D$ <sup>3</sup> é caótico se possuir três propriedades:

- 1 -  $F$  apresenta transitividade topológica;
- 2 - As órbitas periódicas de  $F$  são densas em  $D$ ;
- 3 -  $F$  apresenta dependência sensível às condições iniciais.

Transitividade topológica significa que, para quaisquer dois subconjuntos abertos  $A$  e  $B$  em  $D$ , existe um número inteiro positivo  $k$  tal que  $F^{(k)}(A) \cap B \neq \{\}$ . Portanto, escolhendo dois pontos quaisquer pertencentes ao domínio de  $F$ , existe uma órbita que passa tão próximo quanto se queira desses pontos.

A segunda propriedade pode ser compreendida tomando um conjunto  $A$  e um subconjunto  $B$  de  $A$ . Diz-se que  $B$  é denso em  $A$  se para qualquer ponto  $a \in A$  e para qualquer  $\epsilon > 0$ , há um ponto  $b \in B$  tal que  $\|a - b\| < \epsilon$ . Os números racionais, por exemplo, são densos nos números reais. Os irracionais também são, mas os inteiros, não. No caso da definição, exige-se que para qualquer ponto  $x \in D$ , exista uma órbita periódica tão próxima desse ponto quanto se queira.

Entende-se que  $F$  depende, sensivelmente, das condições iniciais se há um número  $\epsilon > 0$ , tal que para qualquer condição inicial  $x_0$  e para qualquer número  $\delta > 0$ , existe pelo menos um ponto  $x$  com  $\|x - x_0\| < \delta$ , tal que  $\|F^k(x) - F^k(x_0)\| \geq \epsilon$ . Assim, não importa o valor de  $x_0$  e nem o raio  $\delta$ , pode-se sempre encontrar um ponto

---

<sup>3</sup> $D$  é um conjunto ao qual o sistema pertence. Neste conjunto estão contidas as suas condições iniciais e soluções. Normalmente os sistemas dinâmicos estão contidos no conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ).

$x$  no interior da esfera de raio  $\delta$  cuja órbita separa-se da órbita de  $x_0$  de pelo menos  $\epsilon$ . Note que essa definição de sensibilidade às condições iniciais não exige que o  $k$ -ésimo ponto da órbita de  $x$  esteja afastado por uma distância  $\epsilon$ . Isso nos diz que duas condições iniciais próximas geram trajetórias exponencialmente divergentes no espaço de fases do sistema. A sensibilidade a pequenas variações, sobre determinados parâmetros contidos no sistema, faz com que apareça uma imprevisibilidade prática em tempos futuros. A sensibilidade às condições iniciais são avaliadas através do cálculo dos Expoentes de Lyapunov [1, 26].

## 2.2 Seção de Poincaré

Uma ferramenta bastante utilizada na transformação de um fluxo contínuo no espaço de fases em um mapa discreto é a Seção de Poincaré <sup>4</sup>. Esta transformação associa um sistema de  $N$  equações diferenciais, a um mapa, com tempo discreto, num espaço de fases com dimensão  $N - 1$ . Tal método foi desenvolvido por H. Poincaré para o estudo qualitativo do problema de três corpos. O uso desse método nos fornece algumas vantagens como:

- 1) Redução dimensional do problema, de um espaço real de  $N$  dimensões para o espaço de fases de  $N - 1$  dimensões.
- 2) Para sistemas com dimensões de ordem mais baixa, a integração numérica das equações de movimento do problema expõe uma forma mais simples a dinâmica do sistema.
- 3) Essa técnica salienta alguns conceitos físicos importantes no estudo do sistema, que não apareciam em sua forma original. Como, por exemplo, o aparecimento das curvas KAM<sup>5</sup> em sistemas Hamiltonianos.

Para construir uma seção de Poincaré consideramos um fluxo  $N$ -dimensional, representado por equações diferenciais do tipo

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]. \quad (2.11)$$

Essas equações geram um espaço de fases dado pelas variáveis do sistema. Fazendo uma interseção num dado volume desse espaço, obtemos uma hiper-superfície  $\Omega$  por onde o fluxo passará. Cada vez que uma trajetória gerada pela evolução do sistema atravessa a hiper-superfície, é marcado um ponto representado por  $\vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \vec{x}_{n+2}$  e assim sucessivamente, como pode ser visto na figura (2.1). A marcação é feita num único sentido da trajetória. Com esses pontos escrevemos o *mapa de Poincaré* [26], que nos fornece a relação entre um ponto e outro. Na maioria dos casos não é possível achar uma expressão analítica para o mapa de Poincaré. Entretanto, na análise numérica esta ferramenta é bastante útil.

<sup>4</sup>Também chamado de retrato de fases [29].

<sup>5</sup>A sigla KAM vem do Teorema KAM, de Kolmogorov-Arnold-Moser, e será tratado na seção 2.3.

Na figura (2.2) temos uma seção de Poincaré para um bilhar com duas partículas, cujas paredes são modeladas pela função erro. Ver referência [22].

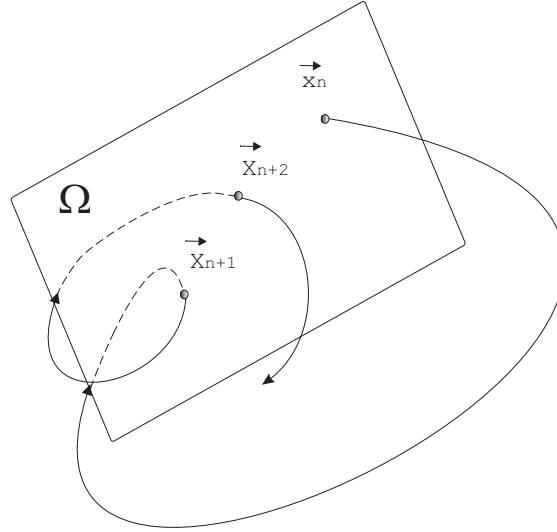


Figura 2.1: Representação da Seção de Poincaré. Nesta figura o fluxo que representa a evolução do sistema, atravessa uma seção  $\Omega$  em vários pontos, formando a seção de Poincaré.

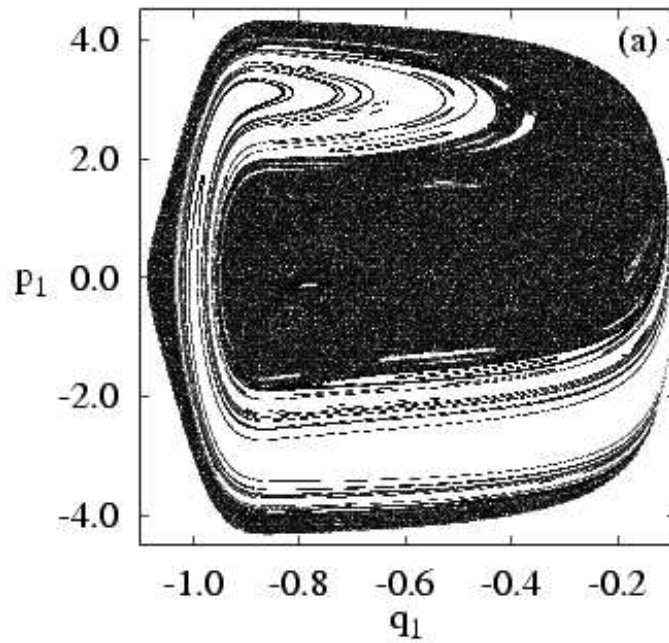


Figura 2.2: Seção de Poincaré para um bilhar com duas partículas, cujas paredes são modeladas pela função erro. Ver referência [22].



## 2.3 Teorema KAM

Na seção (2.1.3) vimos o conceito de integrabilidade. Sistemas integráveis quando submetidos a pequenas perturbações, podem manter a integrabilidade. Isso ocorre mesmo que não consigamos encontrar  $N$  constantes de movimento independentes e em involução [1]. Dado um sistema Hamiltoniano integrável  $H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  com a adição de uma perturbação  $\epsilon H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , teremos o sistema

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (2.12)$$

onde  $\epsilon$  é a intensidade da perturbação. Para esse sistema, mesmo uma perturbação pequena  $\epsilon \neq 0$ , dependendo da simetria da perturbação, todas as constantes de movimento podem ser destruídas.

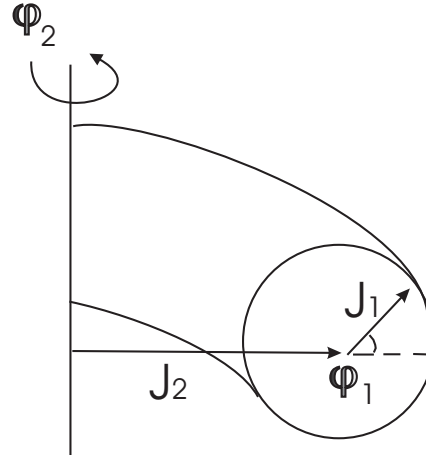


Figura 2.3: Representação do movimento sobre uma superfície toroidal.

O teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) nos fornece a resposta para essa pergunta. Este foi provado independentemente por Vladimir Arnold (1963) [31] e Jürgen Moser (1973) [32], seguindo uma conjectura proposta por Andrey Kolmogorov (1954) [33].

O teorema KAM afirma que, mesmo para sistemas que sofreram pequenas perturbações relativas às suas formas integráveis, superfícies invariantes, que não são necessariamente as constantes de movimento, continuam a existir para a maioria das condições iniciais. Entretanto, as respostas sofridas por toros racionais e irracionais em meio a efeitos perturbativos diferem fundamentalmente. O teorema afirma que os toros racionais são os primeiros a serem destruídos, seguidos pelos toros irracionais, sendo que os toros mais irracionais são os últimos a serem destruídos. É esperado que ocorra um grande acoplamento entre a perturbação e os toros racionais, acontecendo também com as vizinhanças dos toros irracionais. Isso faz com que ocorra a destruição primeiramente dos toros racionais, por este motivo tais toros também

são conhecidos como toros ressonantes. Nenhuma curva invariante, similar a original, permanece nas vizinhanças dos toros destruídos, e o movimento já não pode ser quase-periódico em todo lugar e essas são as regiões nas quais ocorre caos.

Na figura (2.3) temos a representação do Toro. Os raios menor e maior do toro são  $J_1, J_2$ , e os ângulos poloidal e toroidal são  $\varphi_1, \varphi_2$  <sup>6</sup> [26]. Como o movimento do sistema se dá sobre uma superfície  $K_0 = E = \text{constante}$ , então cada valor de  $E$  corresponde a um toro de raios  $J_1$  e  $J_2$ . Essa superfície toroidal é obtida através de  $J_1 = J_2(J_1, E)$  ou  $J_2 = J_1(J_2, E)$ . A variação temporal da posição angular de um ponto sobre o toro é determinada a partir das expressões para  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  (ver Monteiro [26]). Conforme o tempo passa, esse ponto descreve uma trajetória que tem a forma de uma hélice toroidal. Se a razão entre as frequências  $q = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  (número de rotação), for um número racional, ou seja, se  $q = \frac{n_1}{n_2}$ , sendo  $n_1$  e  $n_2$  inteiros, então o toro no qual se encontra a trajetória helicoidal toroidal é denominada de *toro racional* ou superfície racional, e o toro percorrido pela trajetória do sistema é chamado de *toro ressonante*. Qualquer trajetória que pertença a esse toro se fecha após  $n_1$  voltas poloidais e  $n_2$  voltas toroidais. Portanto, valores racionais de  $q$  implicam em um movimento *periódico*.

Se  $q$  é um número irracional, então tem-se um *toro irracional*, e a trajetória jamais se fecha. Assim, para  $t \rightarrow \infty$ , qualquer trajetória cobre toda a superfície do toro, nesse caso, diz-se que o movimento é *quase-periódico* e o toro percorrido pela trajetória do sistema é chamado de *toro não-ressonante*. Um bom exemplo para visualizarmos a aplicação do Teorema KAM é observar o espaço de fases do mapa Padrão definido como

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \sin(2\pi q_n), \\ q_{n+1} &= q_n + p_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

em  $\text{mod}1$ .

Este é um sistema Hamiltoniano integrável para  $K = 0$ . Na figura (2.4) podemos ver esse sistema, onde temos  $p_{n+1}$  sendo uma constante de movimento, por isso o aparecimento de linhas bem definidas no espaço de fases. Aumentando  $K$  estaremos introduzindo uma perturbação ao sistema, como pode ser visto na figura (2.5). Na figura (2.5), os momentos não são constantes e ocorre o surgimento de ilhas de regularidade, ou também chamadas de Armadilhas Dinâmicas [34, 35]. Estas ilhas e linhas que aparecem na figura, são conhecidas como curvas KAM (toros ressonantes e não-ressonantes). Conforme aumentamos a perturbação, os toros ressonantes são quebrados e o movimento caótico aparece (ver figura (2.6) e figura (2.7)). A dinâmica caótica é representada pelos pontos na figura (2.6) e figura (2.7) e o movimento regular ou quase-regular pelas ilhas (curvas fechadas) no espaço de fases.

Para  $K = 0, 18$ , na figura (2.6), vemos novamente regiões com movimento irregular, mas observamos algumas regiões mais densas (com maior número de pontos

---

<sup>6</sup>Aqui,  $J_i$  e  $\varphi_i$  são as variáveis ação-ângulo.

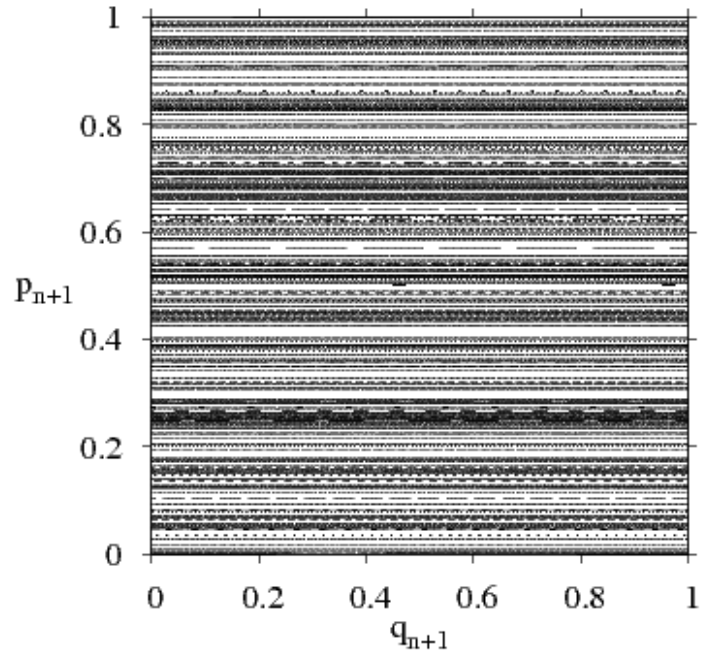


Figura 2.4: Espaço de fases do mapa padrão, com  $K = 0$ , caso integrável. Linhas com  $p_{n+1}$  constante aparecem.

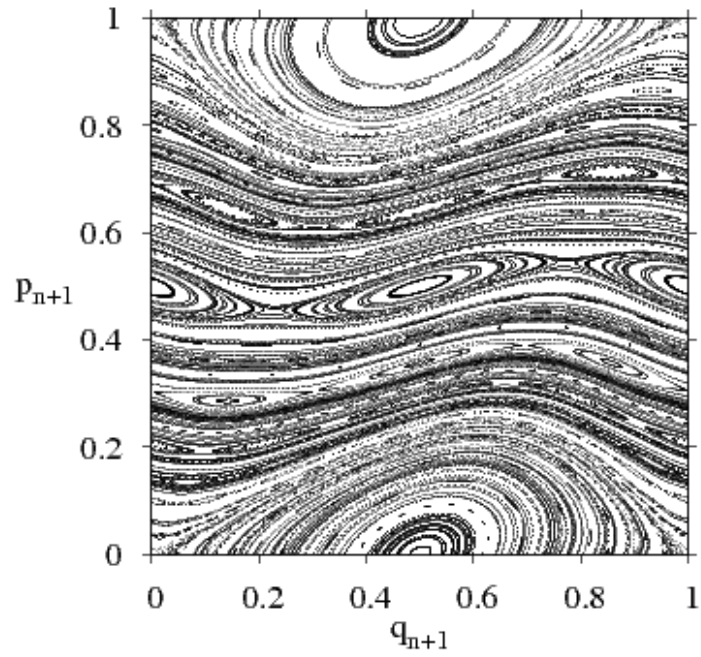


Figura 2.5: Espaço de fases do mapa padrão, com  $K = 0,09$ . Este caso apresenta ilhas no espaço de fases.

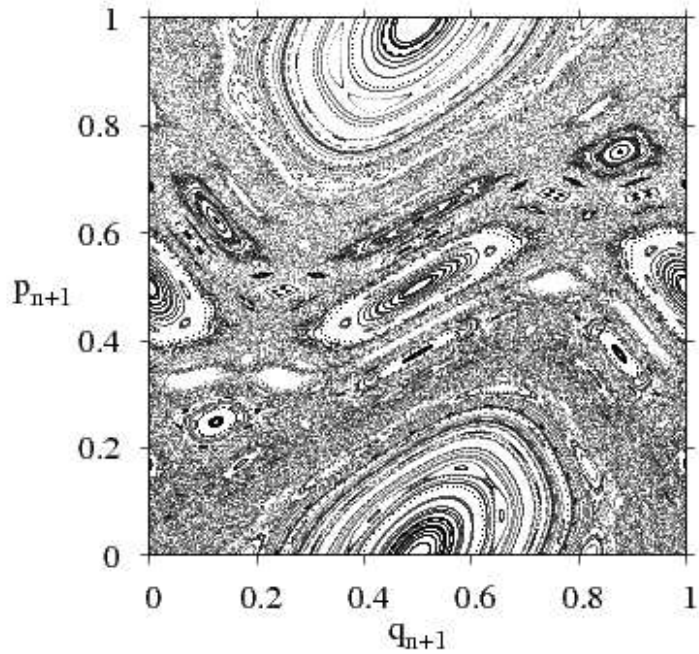


Figura 2.6: Espaço de fases do mapa padrão, com  $K = 0,18$ . Com o aumento da perturbação os toros são quebrados e surgem regiões caóticas representadas por pontos com comportamento irregular na figura.

próximos as ilhas), que são os *Stickiness* [12]. As órbitas que formam estes pontos são caóticas e permanecem por um longo período de tempo próximas as ilhas.

Na figura (2.7) temos o espaço de fases para o mapa padrão com  $K = 0,45$ . Como a perturbação  $K$  aumentou, as regiões caóticas também aumentaram, e apenas algumas ilhas podem ser vistas na figura. Como diz o teorema KAM, apenas os toros irracionais sobrevivem ao aumento da perturbação.

## 2.4 Expoente de Lyapunov

A sensibilidade às mudanças nas condições iniciais geram uma taxa de divergência exponencial entre órbitas próximas no espaço de fases de um sistema dinâmico. Para quantificar essa divergência utilizam-se os Expoentes Característicos de Lyapunov, ou simplesmente, Expoentes de Lyapunov [26, 29].

Num sistema de  $N$  equações diferenciais ordinárias, consideremos uma hiper-esfera de condições iniciais centradas num ponto  $\mathbf{x}(t_0)$ . A hiper-esfera se deforma com a evolução temporal do sistema. Assumindo que o raio inicial  $d_j(t_0)$  varie exponencialmente no tempo ao longo da  $j$ -ésima dimensão, com  $j = 1, 2, \dots, N$ , temos a relação entre  $d_j(t_0)$  e o valor correspondente ao instante  $t$ , dado por  $d_j(t)$ ,

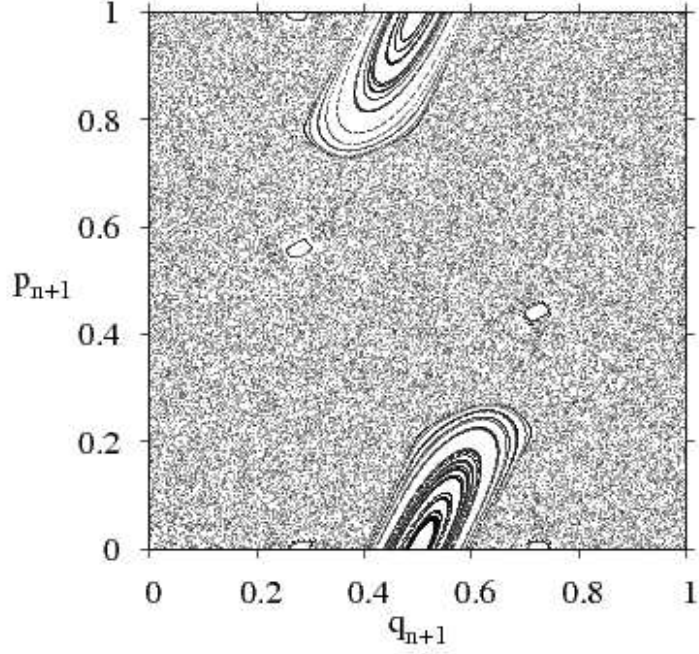


Figura 2.7: Espaço de fases do mapa padrão, com  $K = 0,45$ . Apenas algumas ilhas podem ser vistas nesta figura. Isso é consequência do aumento da perturbação no sistema.

expressa como

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}. \quad (2.14)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lado obtemos

$$\lambda_j = \frac{1}{t - t_0} \ln \left( \frac{d_j(t)}{d_j(t_0)} \right). \quad (2.15)$$

Aplicando o limite de tempos muito grandes (tendendo ao infinito) e de raio muito pequeno (tendendo a zero) obtemos a relação

$$\Lambda_j = \lim_{((t-t_0) \rightarrow \infty)} \lim_{(d_j(t_0) \rightarrow 0)} \frac{1}{t - t_0} \ln \left[ \frac{d_j(t)}{d_j(t_0)} \right] \quad (2.16)$$

Os números  $\Lambda_j$  são chamados de *Expoentes de Lyapunov*. Um sistema de dimensão  $N$  possui  $N$  expoentes de Lyapunov, e estes podem ser escritos de forma decrescente  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$ , do maior para o menor valor.

Num instante  $t > t_0$ , o volume  $V(t)$  da hiper-esfera é proporcional ao produto das distâncias  $d_j(t)$  que o caracterizam, isto é:

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^N d_j(t) = V(t_0)e^{(t-t_0) \sum_{j=1}^N \Lambda_j}, \quad (2.17)$$



sendo  $V(t_0)$  o volume no instante inicial  $t_0$ . Se o sistema é conservativo, então  $V(t) = V(t_0)$ , ou seja,

$$\sum_{j=1}^N \Lambda_j = 0, \quad (2.18)$$

para  $t > t_0$ . Isto mostra que, neste caso, o teorema de Liouville é válido [26, 29]. Se o sistema é dissipativo,  $V(t) < V(t_0)$  para  $t > t_0$ , o que equivale a

$$\sum_{j=1}^N \Lambda_j < 0. \quad (2.19)$$

Numa trajetória fechada, correspondente a uma solução periódica, a distância entre dois pontos se mantém constante, em média, com o passar do tempo, de modo que a expansão associada a essa direção, normalmente, é nula. Portanto, o expoente de Lyapunov correspondente a essa direção é nulo, como provado por Haken em 1983 [36].

O comportamento caótico é caracterizado pela divergência exponencial de órbitas vizinhas. Nesse caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica na dependência sensível às condições iniciais, quando a equação (2.19) é satisfeita. De maneira geral, podemos concluir que:

- a) a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade das órbitas nas direções associadas;
- b) para uma solução periódica, ou quase periódica, pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial;
- c) uma última condição pode ser incluída para sistemas dissipativos: a dependência às condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov  $\Lambda_j > 0$ . As soluções destes sistemas encontram-se em regiões do espaço de fases chamadas de Atrator.

Nesta tese estamos tratando de sistemas Hamiltonianos, que não possuem atratores, por isso, para que o leitor encontre informações detalhadas sobre a definição de atrator, pode-se consultar as referências [1, 26, 29].

Um sistema que possui mais de um expoente de Lyapunov positivo pode ser classificado como sendo *hipercaótico* [37]. Para que o sistema descrito por um fluxo, ou seja, descrito por equações diferenciais, possa ser chamado de hipercaótico as seguintes condições devem ser respeitadas [38, 39]:

- 1) O espaço de fases deve ter dimensão mínima igual a 4 para um sistema de tempo

contínuo (fluxos).

2) O sistema deve possuir mais do que um expoente de Lyapunov positivo, e a somatória de seus expoentes deve ser zero no caso de sistemas conservativos.

Como exemplo da classificação de um sistema conservativo, devido aos expoentes de Lyapunov encontrados, podemos citar um sistema que possua quatro expoentes de Lyapunov, organizados da seguinte maneira:

- a)  $\Lambda_1 > 0$ ;  $\Lambda_2 = 0$ ;  $\Lambda_3 < 0$  e  $\Lambda_4 < 0$ , o sistema é dito caótico [26].
- b)  $\Lambda_1 > 0$ ;  $\Lambda_2 = 0$ ;  $\Lambda_3 = 0$  e  $\Lambda_4 < 0$ , o sistema é dito caótico [26].
- c)  $\Lambda_1 > 0$ ;  $\Lambda_2 > 0$ ;  $\Lambda_3 = 0$  e  $\Lambda_4 < 0$ , o sistema é dito hipercaótico [38].
- d)  $\Lambda_1 > 0$ ;  $\Lambda_2 > 0$ ;  $\Lambda_3 < 0$  e  $\Lambda_4 < 0$ , o sistema é dito hipercaótico [38].

Para todas as alternativas acima a soma dos expoente de Lyapunov devem ser zero no caso de um sistema Hamiltoniano.

Na prática, calculamos os Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito, ou seja, calculamos os expoentes até um determinado tempo, por motivos computacionais. Pode-se fazer esse cálculo de três formas:

1 - Para mapas (tempo discreto) - sejam  $x_0$  e  $x_0 + \delta_0$  duas condições iniciais vizinhas, separadas por uma pequena distância. Considere que após  $N$  iterações do mapa  $x_{j+1} = F(x_j)$ , com  $j = 1, \dots, N$  sendo o tempo discreto e  $N \rightarrow \infty$ , a distância entre esses dois pontos seja  $\delta_N$ , então temos que

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_j}. \quad (2.20)$$

2 - Para fluxos<sup>7</sup> (tempo contínuo) - escolhe-se duas condições iniciais próximas  $x_{10}$  e  $x_{20}$ , sendo que  $\|x_{20} - x_{10}\| = \epsilon$ , onde uma delas gera uma trajetória principal e outra secundária. Após a evolução do sistema até um tempo  $t$ , através da integração das equações de movimento, verifica-se a separação entre as duas trajetórias e para o cálculo dos expoentes de Lyapunov utiliza-se a relação

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[ \frac{d_j(t)}{d_j(t_0)} \right]. \quad (2.21)$$

As trajetórias são escritas no espaço de fases e a separação entre as trajetórias ocorre no que é chamado de *espaço tangente*.

---

<sup>7</sup>Escritos através de equações diferenciais.

3 - Quando o sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

os expoentes de Lyapunov são obtidos através dos autovalores  $(\mu_j)$  da matriz jacobiana  $J(\mathbf{x})$ , com a expressão

$$\Lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mu_j\|, \quad (2.23)$$

onde

$$\mathbf{M} = J(\mathbf{x}_N)J(\mathbf{x}_{N-1}) \cdots J(\mathbf{x}_1), \quad (2.24)$$

e  $J(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ .

Os *stickiness*, definidos anteriormente, fazem com que o Expoente de Lyapunov tenha seu valor reduzido [9, 22] e o movimento se torne quase regular. Eles afetam ainda o fenômeno de transporte e a correlação destes sistemas [12].

## 2.5 Bilhares

Nas últimas três décadas do século XX, os bilhares caóticos se transformaram numa área de intensa investigação em mecânica estatística e disciplinas correlatas. Estudos nesta área começaram em 1927 com um artigo de Birkhoff [40], no qual considerava o problema de movimento livre de uma partícula pontual num bilhar. Uma consideração completa do problema foi analisada por Krylov [41], onde ele estudava a dinâmica de massas pontuais em determinadas regiões delimitadas, hoje conhecidos como bilhares. Contudo, uma investigação mais recente, ocorreu com o trabalho Yakov G. Sinai, de 1970 [5], em que se construiu um aparato matemático para o estudo da hiperbolicidade e propriedades ergódicas de uma classe muito ampla de bilhares planos. Sinai encontrou uma fórmula exata para a entropia do sistema.

A teoria de Sinai levou a publicação de muitos trabalhos em revistas de matemática e de física [42, 43, 44] sobre diversas classes de bilhares no plano e em espaços de várias dimensões. O progresso fundamental da teoria levou a soluções, em algum sentido, da hipótese clássica de Boltzmann (enunciada em 1880) sobre a ergodicidade do modelo de esferas rígidas para gases (ver referência [?]). O avanço no estudo de bilhares também penetrou na mecânica estatística de equilíbrio e outras ciências.

Mais tarde, Casati e Ford [7] mostraram que em um sistema de duas partículas num bilhar unidimensional, sofrendo colisões pontuais e rígidas entre si e com as paredes, existia uma relação dos números racionais e irracionais e das massas das partículas com o comportamento dinâmico do sistema. Este resultado considerava a relação de colisão entre as partículas como

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \kappa v_{1i} + (1 - \kappa)v_{2i}, \\ v_{2f} &= (1 + \kappa)v_{1i} - \kappa v_{2i}, \end{aligned} \quad (2.25)$$



onde

$$\kappa = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.26)$$

Na equação (2.25),  $v_{1(2)f}$  e  $v_{1(2)i}$  representam as velocidades final (f) e inicial (i) das partículas 1 e 2 respectivamente.

As velocidades podem ser escritas em termos de novas variáveis de forma que se obtenha a seguinte relação entre as massas e ângulo

$$\cos \theta = \frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad (2.27)$$

onde  $\gamma = m_2/m_1$  é a razão de massas das partículas. O sistema não é ergódico se  $\theta$  for um múltiplo racional de  $\pi$ , ou seja,  $\theta = \frac{m}{n}\pi$  com  $m$  e  $n$  inteiros. Com isso,  $4n$  velocidades distintas podem ser encontradas. Se  $\theta$  for um número irracional de  $\pi$ , o espaço das velocidades torna-se denso.

Outro trabalho pioneiro foi o de Leonid A. Bunimovich em 1979 [6]. Ele estudou a transição de sistemas integráveis a caóticos utilizando o bilhar Estádio (ver fig. 2.8). Era sabido que uma partícula movendo-se livremente entre as paredes do bilhar Circular (fig 2.9-A) era integrável. Quando o círculo é repartido ao meio e estas metades são ligadas por retas, como no bilhar estádio, o sistema apresenta comportamento caótico. A partir deste estudo diversos trabalhos buscavam descrever o comportamento dinâmico do sistema quando a forma do bilhar era modificada. Como exemplo destes trabalhos podemos mostrar a figura (2.9): na figura (2.9-A) temos um exemplo de uma órbita periódica para uma partícula confinada num bilhar circular [45]. Este bilhar é integrável. Em (2.9-B), temos o bilhar de Sinai [5], composto por disco rígido e fixo, deslocado do centro de um quadrado. As colisões da partícula com o disco geram trajetórias caóticas no espaço de fases. Em (2.9-C), temos o bilhar de Pascalian Snail [46], sendo uma variação do bilhar circular que possui comportamento caótico. Com isso, sabe-se que a transição de um sistema

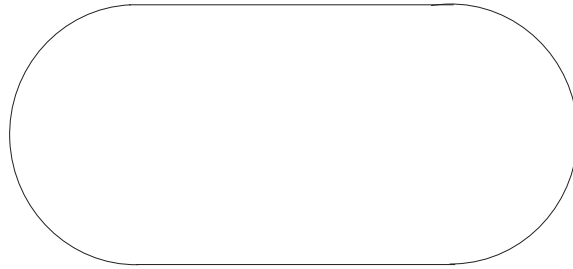


Figura 2.8: Representação do bilhar Estádio de Bunimovich.

de integrável para caótico pode ser obtido com a variação na geometria do bilhar.

O interesse pelo estudo de bilhares, no sentido matemático, teve uma diminuição temporária em alguns anos sendo retomado por volta dos anos 2000, com uma nova

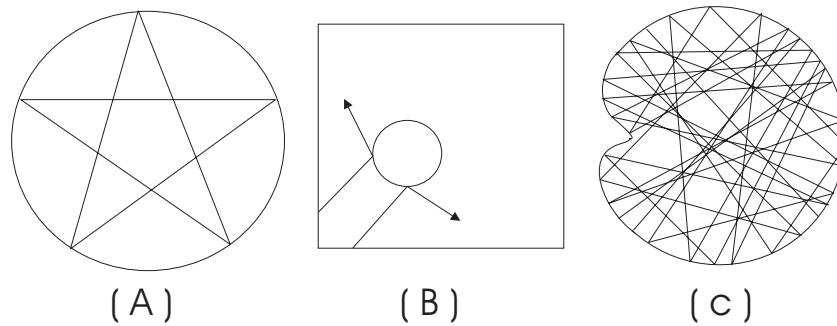


Figura 2.9: Em (A) um exemplo de uma órbita periódica de uma partícula num bilhar circular. Um exemplo de órbitas caóticas nos bilhares (B) Sinai e (C) Pascalian Snail.

geometria de bilhar proposta por Bunimovich, o bilhar Cogumelo [47]. Um exemplo de estudo dessa geometria é o trabalho de Altmann *et al.* [48], em que se investiga as propriedades dinâmicas de trajetórias caóticas no bilhar cogumelo. Este bilhar apresenta bordas simples e bem definidas (ver figura (2.10)) entre uma simples região regular e uma componente caótica. Ele é composto por um “pé” retangular e um chapéu circular.

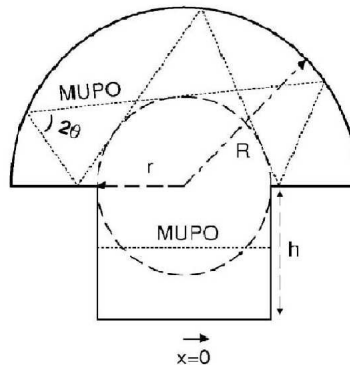


Figura 2.10: Representação do bilhar Cogumelo. Figura retirada de [48]

Eles mostraram que os grudes perto de trajetórias regulares ocorrem através de um número infinito de órbitas periódicas marginalmente instáveis<sup>8</sup> (OPMI ou MUPO em inglês). Estas órbitas tem medida de Lebesgue zero, desta forma não afetam a ergodicidade das regiões caóticas. Contudo, estas órbitas governam as principais propriedades dinâmicas do sistema. Eles também mostraram que as órbitas OPMI geram um decaimento no tempo de recorrência do sistema do tipo lei de potência, com expoente  $\gamma = 2$ . Semelhante estudo foi feito em [49] para o bilhar

<sup>8</sup>As órbitas periódicas marginalmente instáveis (OPMI) são órbitas caóticas que ficam próximas a regiões regulares do espaço de fases. Perturbações sobre essa órbita crescem linearmente no tempo. Para mais detalhes ver [49].

anelar. Este bilhar consiste de um disco pequeno dentro de um círculo maior (dois anéis), sendo o disco deslocado do centro do círculo, como mostra a figura (2.11).

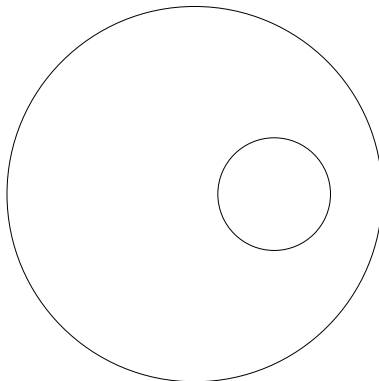


Figura 2.11: Representação do bilhar de círculos concêntricos. Um círculo como borda externa do bilhar e um disco fixo deslocado do centro.

Outra linha de estudos, dentro dos bilhares, são os com paredes dependentes do tempo. Como exemplo citamos o trabalho de Leonel *et al.* [50]. O fenômeno do aumento ilimitado de energia para uma partícula clássica sofrendo colisões elásticas com uma parede rígida, que varia no tempo, é conhecido como aceleração de Fermi. Leonel *et al.* consideraram o fenômeno da aceleração de Fermi para uma partícula clássica dentro de um bilhar oval. As paredes variavam periodicamente no tempo e as colisões da partícula com a parede eram elásticas. Eles mostraram que o movimento das paredes faz com que o sistema se comporte como um acelerador de Fermi, com uma taxa de crescimento exponencial pequena.

Efeitos do arredondamento das bordas na região de saída e entrada de partículas de um bilhar aberto integrável foi analisado por Custódio *et al.* [51]. Eles utilizaram um modelo retangular de bilhar com formato da área de escape sendo um semi-círculo. *Stickiness* e estruturas auto-similares, em forma de listras, são gerados através de diversas condições iniciais em função do tempo de escape e dos ângulos de emissão. Estas estruturas aparecem para dois diferentes tipos de ângulo de emissão de partículas e mesma escala de tempo. Quando o arredondamento das bordas aumenta, as listras começam a se sobrepor. O tempo de escape obedece um decaimento do tipo lei de potência e com isso, difusões anômalas são esperadas. Eles viram que bordas pequenas são suficientes para gerar os *Stickiness*, enquanto que bordas mais grossas produzem tempo de escape com decaimento caótico.

Por um longo tempo bilhares clássicos foram definidos como sistemas contendo uma ou mais partículas, que se movem livremente em um espaço delimitado por paredes rígidas. Poucos trabalhos consideraram a razão entre as massas das partículas que constituem o sistema [7, 9, 52] como um parâmetro de influência sobre sua dinâmica. Outro ponto negligenciado é o tipo de interação entre as partículas e das partículas com as paredes, normalmente tratadas como sendo rígidas e pon-

tuais representadas por funções delta. Alguns trabalhos recentes tem como motivação o estudo de bilhares unidimensionais, por serem sistemas mais simples com dinâmica bastante complexa. O estudo referente a duas partículas clássicas, interagindo num bilhar unidimensional, foi apresentado por Meza-Montes *et al* [8]. As partículas possuíam massas iguais e interagiam via potencial de Coulomb. Esse trabalho mostrou, através de seções de Poincaré, que o sistema apresenta ilhas de regularidade dentro do mar caótico no espaço de fases.

Recentemente foi estudado [9] um sistema envolvendo o potencial de Yukawa para interação entre duas partículas confinadas num bilhar unidimensional com paredes rígidas. A razão de massas das partículas é tratada como parâmetro do sistema, e as partículas sofrem colisões rígidas com as paredes. Nesse trabalho, o sistema apresenta comportamento misto (regular e caótico).

Existem poucos trabalhos na literatura sobre bilhares clássicos com paredes suaves [53], mas sabemos que partículas interagentes dentro de um bilhar com paredes suaves podem ser usadas para modelar a dinâmica de elétrons em pontos quânticos. Nesse sistema os elétrons são confinados dentro de um disco feito de material semicondutor, em que a interação do material com os elétrons [54] é feita através de potenciais suaves. Nossa motivação para o estudo de bilhares clássicos com transição de paredes rígidas para suaves está em determinar o comportamento dinâmico do sistema (integrável, caótico ou misto), além de tentarmos fornecer um modelo teórico mais realístico da natureza. Buscamos descobrir quais as modificações do sistema quando variamos a interação e a razão de massas entre as partículas.

Nesse contexto, um primeiro passo foi dado com um trabalho em 2008 [22], que estudava um sistema com duas partículas num bilhar com paredes suaves. O potencial das paredes era modelado pela função “Erro”, de forma que a força de interação entre partícula-parede fosse uma Gaussiana. As expressões para o potencial e a força podem ser vistas abaixo. Tanto o potencial, quanto a força dependem da posição da parede e do parâmetro de suavidade  $\sigma$

$$V_k(q_i) = (-1)^k \frac{V_0}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_i + (-1)^{k-1}) \right), \quad (2.28)$$

$$F_{k,i} = (-1)^{k-1} \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(q_i + (-1)^{k-1})^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.29)$$

Nas equações (2.28) e (2.29)  $V_k(q_i)$  é o potencial da parede para a partícula  $i = 1, 2$ , e  $k$  representa o lado da parede, ou seja,  $k = 1$  parede da esquerda,  $k = 2$  parede da direita.  $q_i$  é a posição das partículas e  $F_{k,i}$  é a força de interação entre partícula e parede. Quando  $\sigma \rightarrow 0$  a parede torna-se rígida e a força de interação tende a uma delta.

Nesse trabalho verificamos que, conforme a razão de massas  $\gamma = m_2/m_1$  aumenta, um grande número de armadilhas dinâmicas apareciam. Esse resultado foi obtido via seção de Poincaré do sistema e da distribuição dos Expoentes de Lyapunov Máximos a tempo finito [55], como visto na figura (2.12). Nesta figura, a

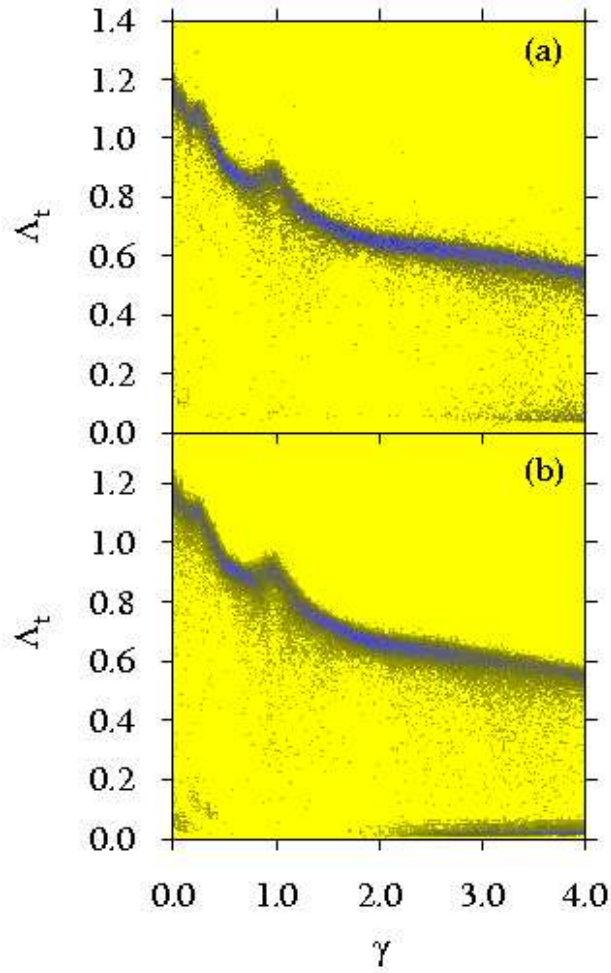


Figura 2.12: Distribuição dos Expoentes de Lyapunov Máximos a tempo finito da Figura retirada de [22]. Em (a) temos o bilhar com paredes rígidas, e em (b) o caso de paredes quase rígidas. A curva em azul representa o expoente de Lyapunov máximo a tempo finito de maior probabilidade de ocorrência. Os pontos abaixo desta curva aparecem devido as armadilhas dinâmicas no espaço de fases.

curva em azul representa o expoente de Lyapunov máximo a tempo finito de maior probabilidade de ocorrência (ver [22]). Os pontos abaixo desta curva aparecem devido as armadilhas dinâmicas no espaço de fases. Elas reduzem o valor dos expoentes de Lyapunov. Quanto maior é o número de pontos abaixo da curva em azul, maior é o número de ilhas no espaço de fases. Na figura (2.12-a) é apresentado o caso de paredes rígidas e em (2.12-b) o caso de paredes suaves. Pode-se observar um maior número de pontos abaixo da curva em azul no caso de paredes suaves, indicando maior regularidade no movimento do sistema. Isso mostra que o sistema, evoluído através das equações de movimento, apresenta maior regularidade quando as paredes são suaves.

Nesta tese buscamos estudar o comportamento dinâmico de bilhares quando

há a transição de paredes rígidas para suaves através da generalização do potencial das paredes em degraus. Dessa forma, quando o número de degraus é suficientemente grande, seria possível escrever qualquer tipo de função desejada que representa uma parede, como a função Erro vista na equação (2.28).

Essa transição das paredes também é analisada para três partículas sobre um anel sem atrito com interações suaves. Veremos (capítulo 4) que as interações entre as partículas podem ser comparadas com paredes de um bilhar triangular.

## Capítulo 3

# Duas partículas num bilhar unidimensional

Neste capítulo trataremos de duas partículas interagentes<sup>1</sup> num bilhar unidimensional. No trabalho de 2008 [22] fizemos o estudo de duas partículas num bilhar unidimensional onde as paredes suaves do bilhar eram modeladas pela função Erro ( $\text{erf}(x)$ ) (figura 3.1). As paredes vistas na figura (3.1) mostram o comportamento da equação (2.28). Verificamos que o sistema apresentava espaço de fases dividido entre caótico e regular quando as paredes eram rígidas ou suaves.

Nesta tese, buscamos mapear a dinâmica do sistema através das seções de Poincaré e do cálculo dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito. Os expoentes podem ser obtidos dos autovalores da matriz Monodrômica ( $M$ ), que surge da relação entre os estados inicial e final do sistema em determinado tempo, ou seja,

$$\mathbf{x}_f = M\mathbf{x}_i. \quad (3.1)$$

A matriz Monodrômica nos permite identificar explicitamente quais os termos que influenciam no comportamento do sistema. A construção da matriz de evolução, no espaço de fases e tangente, torna-se complicada com a função erro, por isso faremos uma aproximação nas paredes do bilhar através de degraus. A função que descreve o potencial das paredes será expressa em potenciais degrau conforme descrito pela figura (3.2). Neste trabalho construímos paredes com até três degraus, mas a idéia é tentar construir uma paredes com muitos degraus.

---

<sup>1</sup>Neste trabalho [22], o potencial de interação das partículas é dado pelo potencial de Coulomb ( $V = 1/r$ ), onde  $r = q_2 - q_1$  é a posição relativa das partículas.

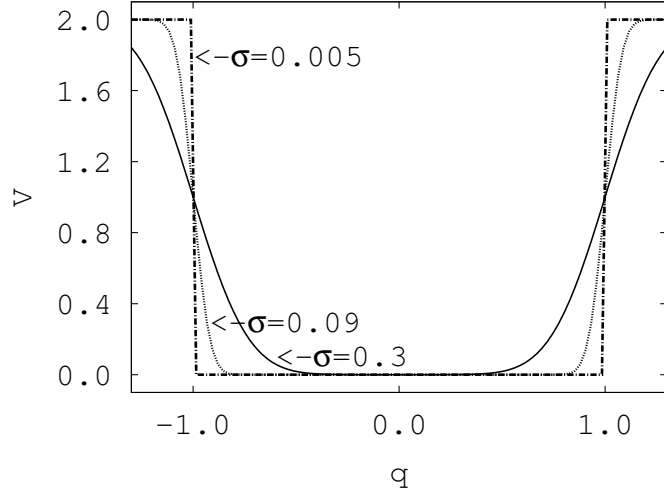


Figura 3.1: Bilhar com paredes suaves construído com a função erro. Esta figura mostra a mudança das paredes conforme é modificado o parâmetro de suavidade. Paredes suaves para  $\sigma = 0, 3$ , paredes quase-rígidas para  $\sigma = 0, 09$  e paredes rígidas para  $\sigma = 0, 005$ .

## 3.1 Resultados analíticos

### 3.1.1 Dinâmica de partículas não-interagentes colidindo com vários potenciais degrau

Começamos escrevendo as grandezas envolvidas no sistema em termos das coordenadas relativas e do centro de massa

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{r} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 & \text{Coordenadas relativas,} \\ \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2}{m_1 + m_2} & \text{Coordenadas do Centro de massa,} \\ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} & \text{Massa reduzida do sistema.} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Nas colisões entre partículas, o momento do centro de massa ( $\mathbf{P}$ ) é uma constante

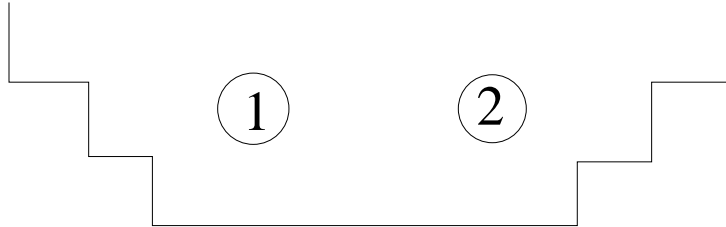


Figura 3.2: Aproximação das paredes do bilhar suave em degraus.



de movimento. Quando não há interação entre partículas, elas se movem livremente entre as paredes.

Nesta parte do trabalho, consideraremos que não há interação entre as partículas e construiremos uma relação entre os estados iniciais e finais do sistema. Para essa situação podemos definir um ponto no espaço de fase como

$$x_i = [r_i(t), R_i(t), v_i(t), V_i(t), a_r(t), a_s(t)], \quad (3.3)$$

onde,  $r$  e  $v$  são posição e velocidade relativas, respectivamente,  $R$  e  $V$  são posição e velocidade do centro de massa, respectivamente e  $a_r(t) = a_1 - a_2$ ,  $a_s(t) = a_1 + a_2$ , sendo  $a_1$  e  $a_2$  as acelerações das partículas 1 e 2.

A relação que expressa a evolução temporal do sistema quando as partículas estão entre as paredes (região livre de potencial) e sobre os degraus, não havendo colisão partícula-partícula e partícula-parede, é

$$x_{t_{i+1}} = D(t_{i+1} - t_i)x_{t_i}, \quad (3.4)$$

onde  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$  é o intervalo de tempo entre um estado inicial e um estado final.  $D(t_{i+1} - t_i)$  é a matriz que relaciona estes estados. Sabendo que

$$r = x_1 - x_2 = (x_{01} - x_{02}) + (v_{01} - v_{02})t + \frac{(a_{01} - a_{02})t^2}{2}, \quad (3.5)$$

então, com  $a_{01} = a_{02} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t_{i+1}) = r(t_i) + v(t_i)(t_{i+1} - t_i), \\ R(t_{i+1}) = R(t_i) + V(t_i)(t_{i+1} - t_i), \\ v(t_{i+1}) = v(t_i), \\ V(t_{i+1}) = V(t_i), \\ a_r(t_{i+1}) = a_r(t_i), \\ a_s(t_{i+1}) = a_s(t_i). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Na forma matricial temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r(t_{i+1}) \\ R(t_{i+1}) \\ v(t_{i+1}) \\ V(t_{i+1}) \\ a_r(t_{i+1}) \\ a_s(t_{i+1}) \end{pmatrix}}_{x_{t_{i+1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & (t_{i+1} - t_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (t_{i+1} - t_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D(t_{i+1} - t_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} r(t_i) \\ R(t_i) \\ v(t_i) \\ V(t_i) \\ a_r(t_i) \\ a_s(t_i) \end{pmatrix}}_{x_{t_i}}. \quad (3.7)$$

Mesmo sabendo que as acelerações são iguais a zero, quando não há interação, devemos mantê-las porque elas terão sentido quando houver interação entre as partículas e tempos ao quadrado aparecerão.

Quando a colisão se dá entre as partículas, em  $r = 0$ , obedecemos as transformações [7] (relação de Casati e Ford)

$$v_{1f} = \kappa v_{1i} + (1 - \kappa)v_{2i} \quad (3.8)$$

$$v_{2f} = (1 + \kappa)v_{1i} - \kappa v_{2i}, \quad (3.9)$$

onde  $\kappa = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ . Então, seja qual for a massa, fazendo  $v_f = v_{2f} - v_{1f}$ , temos

$$v_f = -v_i, \quad (3.10)$$

onde  $v_i = v_{2i} - v_{1i}$ . Escrevendo essas informações em termos de matriz, temos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r(t_{i+1}) \\ R(t_{i+1}) \\ v(t_{i+1}) \\ V(t_{i+1}) \\ a_r(t_{i+1}) \\ a_s(t_{i+1}) \end{pmatrix}}_{x_{t_{i+1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D(t_{i+1}-t_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} r(t_i) \\ R(t_i) \\ v(t_i) \\ V(t_i) \\ a_r(t_i) \\ a_s(t_i) \end{pmatrix}}_{x_{t_i}}. \quad (3.11)$$

A matriz  $D(t_{i+1} - t_i)$  na equação (3.11) representa a matriz de colisão entre as partículas no bilhar.

Construiremos matrizes que descrevem as colisões entre partículas e partículas-parede. Para isso, podemos “olhar” apenas para a partícula 2, que se encontra no lado direito do bilhar. Fazemos isso porque as coordenadas relativas e do centro de massa fornecem informação sobre as duas partículas ao mesmo tempo. Então, se focarmos a partícula 1 nos cálculos, obteremos expressões analíticas idênticas, mas com sinais opostos.

Descreveremos uma parede suave no bilhar via degraus, conforme as figuras (3.2 e 3.3). Quando temos  $n$  degraus, qualquer função real poderá ser modelada, como uma função exponencial ou função erro. Obviamente que estes  $n$  degraus devem satisfazer certas condições de contorno para o limite de muitos degraus com  $n \rightarrow \infty$ . A altura ( $V_n$ ) e a largura ( $\Delta x_n$ ) de cada degrau devem ser variáveis.

A matriz de evolução entre os estados inicial e final não é descrita apenas pela colisão das partículas com um degrau. Se isso fosse feito estaríamos desconsiderando a interação que existe entre a parede e cada partícula. Dessa forma, devemos considerar a passagem das partículas por cada região presente na figura (3.3).

Utilizaremos o seguinte procedimento: consideremos a partícula 2 na direita. Escolhemos como posição inicial o centro do bilhar. A partícula se desloca então em direção a parede da direita, até encontrar o degrau. Esta passará pelos  $n$  degraus

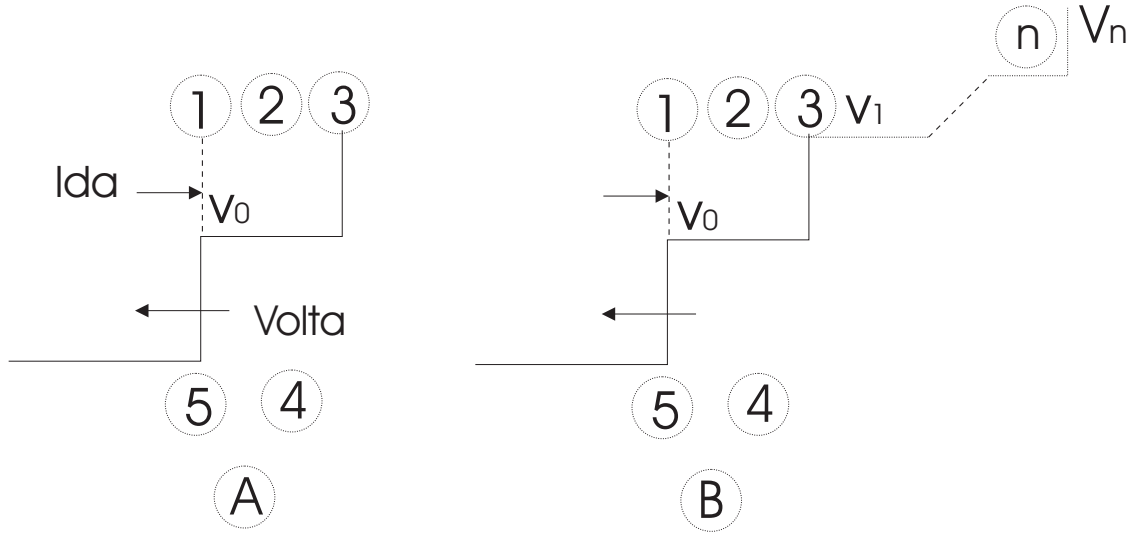


Figura 3.3: Aproximação do potencial suave em degraus. Em (A) potencial com apenas um degrau e 5 colisões. Em (B) representação de  $n$  degraus.

existentes, colidirá com a parede e voltará até a posição inicial. A parede tem potencial maior que a energia cinética da partícula, por isso ela colide e muda o sentido do seu momento.

Considerando, primeiro, passagem da partícula 2 (direita) pela região 1, apresentado pela figura (3.3). Nesta figura temos pequenos degraus com potenciais constantes  $V_n$ , onde  $n = 0, 1, \dots, N$ . Se a energia cinética da partícula 2 for maior que o potencial do degrau, esta segue em direção a região 2 e tem sua velocidade alterada. Se não possuir energia cinética suficiente para transpor o degrau, o momento inverte o sentido e a partícula retorna para o centro do bilhar. A conservação da energia mecânica, no degrau, é sempre respeitada por

$$E_i = E_f \longrightarrow \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + V_0, \quad (3.12)$$

onde  $V_0$  é a altura do degrau na região 1. Estamos interessados em relacionar as grandezas finais com iniciais, então isolamos  $v_{2f}$  e temos

$$v_{2f} = \sqrt{v_{2i}^2 - \frac{2V_0}{m_2}} = A_0^- v_{2i}, \quad (3.13)$$

onde faremos

$$A_0^- = \sqrt{1 - \frac{V_0}{K_{2i}}}, \quad (3.14)$$

onde  $K_{2i}$  é a energia cinética inicial da partícula 2, então

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = A_0^- v_{2i}. \end{cases} \quad (3.15)$$

As posições das partículas, para essa colisão, são

$$\begin{cases} q_{1f} = q_{1i}, \\ q_{2f} = q_{2i}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Em termos das coordenadas relativas e do centro de massa temos

$$r_i = q_{1i} - q_{2i}, \quad r_f = q_{1f} - q_{2f}, \quad (3.17)$$

então

$$\begin{cases} r_f = r_i, \\ R_f = R_i. \end{cases} \quad (3.18)$$

Já as velocidades antes da passagem são

$$v_i = v_{1i} - v_{2i}, \quad V_i = \frac{1}{M}(m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}). \quad (3.19)$$

Isolando  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$  em termos de  $v_i$  e  $V_i$  e dispondo em forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -\frac{m_1}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ v_i \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Após a passagem pelo degrau temos:

$$v_f = v_{1i} - A_0^- v_{2i}, \quad M V_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + A_0^- m_2 v_{2i}. \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.20) em (3.21), temos:

$$v_f = \left( \frac{A_0^- m_1 + m_2}{M} \right) v_i + (1 - A_0^-) V_i, \quad (3.22)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} (1 - A_0^-) v_i + \left( \frac{m_1 + A_0^- m_2}{M} \right) V_i. \quad (3.23)$$

Para simplificarmos estas expressões faremos:

$$\zeta_0^- = \left( \frac{A_0^- m_1 + m_2}{M} \right), \quad \varrho_0^- = (1 - A_0^-), \quad \xi_0^- = \left( \frac{m_1 + A_0^- m_2}{M} \right), \quad (3.24)$$

onde o índice 0 está relacionado com  $A_0$ , e consequentemente com o potencial inicial  $V_0$ , o sinal  $(-)$  com o sinal dentro da raiz de (3.14).

Então temos:

$$v_f = \zeta_0^- v_i + \varrho_0^- V_i, \quad (3.25)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} \varrho_0^- v_i + \xi_0^- V_i. \quad (3.26)$$

A matriz que relaciona as coordenadas iniciais e finais tem a forma

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \\ a_{rf} \\ a_{sf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \\ a_{ri} \\ a_{si} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Na região 2, a partícula 2 move-se livremente, com velocidade constante, e as posições iniciais e finais são dadas por

$$\begin{cases} r_f = r_i + \Delta t_1 v_i, \\ R_f = R_i + \Delta t_1 V_i, \\ v_f = v_i, \\ V_f = V_i. \end{cases} \quad (3.28)$$

Ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \\ a_{rf} \\ a_{sf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \\ a_{ri} \\ a_{si} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

A barreira na região 3 é considerada  $V_1 = \infty$ , de modo que a partícula não possua energia cinética suficiente para ultrapassá-la e sempre volta no sentido contrário ao centro do bilhar. Na região 3 a partícula colide com a parede, então nossas grandezas, antes e depois da colisão, ficam na forma

$$\begin{cases} r_f = r_i, \\ R_f = R_i. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = -v_{2i}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Com

$$v_f = v_{1i} + v_{2i}, \quad MV_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i}. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.20) em (3.31), obtemos:

$$v_f = -\kappa v_i + 2V_i, \quad (3.32)$$

com  $\kappa = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$  e

$$V_f = \frac{2\mu}{M} v_i + \kappa V_i. \quad (3.33)$$

Então podemos escrever

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \\ a_{rf} \\ a_{sf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \\ a_{ri} \\ a_{si} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

As matrizes de evolução do sistema, levando-se em conta a colisão da partícula 2 com a parede da direita, nas regiões 1, 2 e 3 são escritas como

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Agora devemos encontrar matrizes para a volta da partícula 2, sentido da direita para a esquerda. A primeira região que devemos olhar é a 4 (ver figura 3.3), onde a partícula movimenta-se livremente, então

$$\begin{cases} r_f = r_i - \Delta t_2 v_i, \\ R_f = R_i - \Delta t_2 V_i. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = v_{2i}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Assim

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

A matriz  $M_4$  difere de  $M_2$  apenas pelo sinal negativo no tempo, isso se deve ao fato de que a velocidade da partícula mudou, ou seja, o movimento agora é no sentido contrário como estamos propondo. Na região 5, a partícula se depara com mais uma passagem entre potenciais, no caso  $V_i = V_0$  e  $V_f = 0$ . Para esta situação, fazemos uso novamente da conservação da energia mecânica do sistema, então

$$E_i = E_f \longrightarrow \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 + V_0 = \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2, \quad (3.39)$$

isolando  $v_{2f}$  obtemos

$$v_{2f} = \sqrt{v_{2i}^2 + \frac{2V_0}{m_2}} = \left( \sqrt{1 + \frac{2V_0}{m_2 v_{2i}^2}} \right) v_{2i} = A_0^+ v_{2i}, \quad (3.40)$$

com

$$A_0^+ = \sqrt{1 + \frac{V_0}{K_{2i}}}. \quad (3.41)$$

A velocidade da partícula 1, a posição relativa e do centro de massa se mantêm constantes, com isso temos

$$\begin{cases} r_f = r_i, \\ R_f = R_i, \\ v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = A_0^+ v_{2i}. \end{cases} \quad (3.42)$$

A velocidade relativa é escrita como

$$v_f = v_{1f} - v_{2f} = v_{1i} - A_0^+ v_{2i}, \quad (3.43)$$

e a velocidade do centro de massa final é dada por

$$MV_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + A_0^+ m_2 v_{2i}. \quad (3.44)$$

Com o auxílio de (3.20) obtemos

$$v_f = \left( \frac{A_0^+ m_1 + m_2}{M} \right) v_i + (1 - A_0^+) V_i, \quad (3.45)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} (1 - A_0^+) v_i + \left( \frac{m_1 + A_0^+ m_2}{M} \right) V_i. \quad (3.46)$$

Afim de simplificarmos estas expressões, faremos a seguinte substituição:

$$\zeta_0^+ = \left( \frac{A_0^+ m_1 + m_2}{M} \right), \quad \varrho_0^+ = (1 - A_0^+), \quad \xi_0^+ = \left( \frac{m_1 + A_0^+ m_2}{M} \right) = \xi_0^+, \quad (3.47)$$

onde o índice 0 está relacionado com  $A_0^+$  e  $V_0$  e o sinal (+) com o sinal dentro da raiz de (3.41). Então

$$v_f = \zeta_0^+ v_i + \varrho_0^+ V_i, \quad (3.48)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} \varrho_0^+ v_i + \xi_0^+ V_i. \quad (3.49)$$

Agora podemos escrever a matriz que relaciona as coordenadas finais e iniciais do sistema como

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \\ a_{rf} \\ a_{sf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^+ & \varrho_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M} \varrho_0^+ & \xi_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \\ a_{ri} \\ a_{si} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Chamaremos a matriz encontrada para a região 5 de  $M_5$ .

Todo o procedimento feito até aqui consiste na passagem de uma das partículas por um potencial degrau, de uma colisão com a parede e da sua volta, passando novamente pelo degrau inicial. O potencial suave do bilhar, dado por uma função qualquer

pode ser representado por uma soma ponderada sobre infinitos degraus entre um intervalo de  $\Delta x$  qualquer e diferentes potenciais  $V_i$ . As velocidades, das partículas que estarão nessas regiões, são  $v_{j,n+1}$ , onde o índice  $j$  representa a partícula. As matrizes que representam a passagem das partículas pelos degraus são escritas como:

$$M_{j,n+1} = (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_n^\mp & \varrho_n^\mp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M} \varrho_n^\mp & \xi_0^\mp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

sendo a passagem pelos degraus na ida (expoente  $-$ , “subindo o degrau”), e volta (expoente  $+$ , “descendo o degrau”). Entre os degraus temos

$$M_{j,n+2} = (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

com o sinal  $+$  na frente do tempo para a ida (sentido positivo do eixo), e  $-$  para a volta (sentido negativo do eixo). Para as colisões partículas-paredes, que fazem as mudanças nos sentidos dos momentos das partículas, a matriz geral de evolução é escrita como

$$M_{j,N} = (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Uma órbita completa, caótica ou periódica, pode ser obtida pela multiplicação das matrizes anteriores da seguinte forma

$$x_f = M_{j,n+1,-} \cdot \dots \cdot M_{j,n+2} \cdot \dots \cdot M_{j,N} \cdot \dots \cdot M_{j,n+2} \cdot \dots \cdot M_{j,n+1,+} \cdot x_i. \quad (3.54)$$

Para isso, basta saber as coordenadas iniciais e finais de uma das partículas. A dificuldade de montar essa expressão vem do tempo de evolução do sistema e consequentemente, no número de matrizes a serem multiplicadas, pois quando há a repetição das etapas citadas acima temos novas matrizes para incluir em (3.54).

### 3.1.2 Dinâmica de partículas não-interagentes no espaço tangente

Os expoentes de Lyapunov podem ser obtidos se conhecermos os autovalores da *matriz Monodrômica* (matriz do espaço tangente), por isso deduziremos agora



essa matriz de evolução em termos das variáveis do centro de massa e relativas.

No espaço de fases a evolução entre dois pontos é expressa através de

$$x_f = D_j x_i. \quad (3.55)$$

Uma trajetória principal pode ser obtida pela evolução do sistema, com certas condições iniciais em  $t_0$ , até um tempo  $t$  no espaço de fases. Também se evolui, até um tempo  $t$ , outra trajetória chamada de satélite. Esta possui condições iniciais muito próximas das condições da trajetória principal. A diferença entre estas duas trajetórias no tempo  $t$  revela se o sistema evolui linearmente ou exponencialmente. Neste caso dizemos que a dinâmica se dá no espaço tangente, então a evolução entre dois pontos é dado por

$$\delta x(t) = MT \delta x(t_0), \quad (3.56)$$

onde  $MT$  é chamada de *matriz Monodrômica*, atuando como operador de evolução nesse espaço, e pode ser escrita como

$$MT = \frac{dx(t)}{dx(t_0)}. \quad (3.57)$$

Durante o movimento livre entre as colisões, a dinâmica no espaço tangente é similar a dinâmica no espaço de fases, por isso a *matriz Monodrômica* pode ser escrita como

$$MT = D(t_{i+1} - t_i). \quad (3.58)$$

Essa matriz expressa o movimento livre das partículas e é dada pela matriz (3.11).

Quando temos colisões das partículas com as paredes e a passagem destas pelos potenciais degrau, precisamos construir equações que descrevam a dinâmica do sistema no espaço tangente. Para isso utilizaremos o algoritmo de Dellago *et al.* [23], expresso por

$$\delta x_f = \frac{\partial M}{\partial x_i} \delta x_i + \left[ \frac{\partial M}{\partial x_i} F(x_i) - F[M(x_i)] \right] \delta \tau. \quad (3.59)$$

Dellago utiliza este método para construir matrizes de ordem 2 para apenas as colisões das partículas com as paredes do bilhar. Em nosso sistema temos,

$$F(x) = \dot{x} = (\dot{r}, \dot{R}, \dot{v}, \dot{V}, \dot{a}_r, \dot{a}_s), \quad (3.60)$$

que representa o movimento das partículas entre as colisões, existindo ou não interação entre elas. O ponto aqui, em  $\dot{x}$ , representa a derivada total pelo tempo  $dx/dt$ . Não havendo interação entre as partículas, temos velocidades relativas e do centro de massa sendo constantes nas colisões, então

$$F(x) = \dot{x} = (\dot{r}, \dot{R}, 0, 0, 0, 0). \quad (3.61)$$

O termo  $\delta \tau$  em (3.59), corresponde ao tempo de atraso que ocorre entre o instante de colisão da trajetória satélite em relação ao instante de colisão da trajetória principal.

O tempo de atraso para a partícula 1(2) pode ser considerado muito pequeno nessas colisões, podendo expressá-lo como

$$\delta\tau_{1(2)} = -\frac{\delta q_{1(2)}}{v_{1(2)}}. \quad (3.62)$$

As velocidades das partículas 1(2) antes das colisões podem ser escritas em termos das coordenadas do centro de massa e coordenadas relativas na forma

$$v_{1(2)} = V - (-1)^{1(2)} \frac{m_{2(1)}}{M} v. \quad (3.63)$$

A diferença espacial entre a trajetória satélite e a principal é dada por

$$\delta q_{1(2)} = \delta R - (-1)^{1(2)} \frac{m_{2(1)}}{M} \delta r. \quad (3.64)$$

Se substituirmos (3.63) e (3.64) em (3.62), temos

$$\delta\tau_{1(2)} = -\frac{M\delta R_i - (-1)^{1(2)} m_{2(1)} \delta r_i}{MV_i - (-1)^{1(2)} m_{2(1)} v_i}. \quad (3.65)$$

Com as equações (3.59), (3.65), e as matrizes encontradas na seção anterior, podemos construir a *matriz Monodrômica*  $MT_n$  que relaciona  $\delta x_f$  e  $\delta x_i$  nas colisões da partícula 2 com a parede da direita ( $j = 2$ ). A conexão entre  $\delta x_f$  e  $\delta x_i$  é dada pela equação (3.56). A construção dessa matriz deve respeitar cada região presente na figura (3.3), como havíamos feito na seção anterior.

Analisaremos primeiramente o caso do potencial com um degrau e uma colisão, onde as partículas não interagem entre si. Na sequência, estenderemos essas equações para um caso mais geral.

Para a colisão com a parede temos

$$F(x_i) = \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

$$F[M(x_i)] = \begin{pmatrix} -\kappa v_i + 2V_i \\ \frac{2\mu}{M} v_i + \kappa V_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = M_1, \quad (3.68)$$

de

$$x_f = M_j x_i. \quad (3.69)$$

Então

$$\delta x_f = \frac{\partial M}{\partial x_i} \delta x_i + \left[ \frac{\partial M}{\partial x_i} F(x_i) - F[M(x_i)] \right] \delta \tau. \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \delta x_f = \begin{pmatrix} \delta r_f \\ \delta R_f \\ \delta v_f \\ \delta V_f \\ \delta a_{rf} \\ \delta a_{sf} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta R_i \\ \delta v_i \\ \delta V_i \\ \delta a_{ri} \\ \delta a_{si} \end{pmatrix} \\ + \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\kappa v_i + 2V_i \\ \frac{2\mu}{M} v_i + \kappa V_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \delta \tau. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Podemos escrever a expressão acima na forma de equações

$$\delta r_f = \delta r_i + ((1 + \kappa)v_i - 2V_i)\delta \tau, \quad (3.72)$$

$$\delta R_f = \delta R_i + \left( -\frac{2\mu}{M}v_i + (1 - \kappa)V_i \right) \delta \tau, \quad (3.73)$$

$$\delta v_f = -\kappa \delta v_i + 2\delta V_i, \quad (3.74)$$

$$\delta V_f = \frac{2\mu}{M} \delta v_i + \kappa \delta V_i. \quad (3.75)$$

Substituindo o tempo de atraso (3.65) em (3.72) e (3.73) determinamos

$$\delta r_f = -\kappa \delta r_i + 2\delta R_i, \quad (3.76)$$

$$\delta R_f = \frac{2\mu}{M} \delta r_i + \kappa \delta R_i, \quad (3.77)$$

$$\delta v_f = -\kappa \delta v_i + 2\delta V_i, \quad (3.78)$$

$$\delta V_f = \frac{2\mu}{M} \delta v_i + \kappa \delta V_i. \quad (3.79)$$

Então obtemos a *matriz Monodrômica* que representa a colisão com a parede na forma [9]:

$$MT_{2,3} = \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Para a região 1 (da figura 3.3) obtemos

$$MT_{2,1} = \begin{pmatrix} \psi_n^- & \chi_n^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\chi_n^- & \eta_n^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_n^- & \varrho_n^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_n^- & \xi_n^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

onde

$$\psi_n^- = \left( \frac{(1/A_n^-)m_1 + m_2}{M} \right), \quad \chi_n^- = (1 - (1/A_n^-)), \quad (3.82)$$

$$\eta_n^- = \left( \frac{m_1 + (1/A_n^-)m_2}{M} \right). \quad (3.83)$$

As matrizes *Monodrômicas* para as regiões 2 e 4, possuem a mesma forma das matrizes no espaço de fases, sendo escritas como

$$MT_{2,2(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{2(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{2(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

E por fim, a matriz que representa a passagem pela região 5, no espaço tangente, é escrita como:

$$MT_{2,5} = \begin{pmatrix} \psi_0^+ & \chi_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\chi_0^+ & \eta_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^+ & \varrho_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^+ & \xi_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Com a variação do sinal  $(-)$  para  $(+)$ , que representa os sinais dentro da raiz de  $A_0^\pm$ .

Os autovalores das equações 3.80, 3.81, 3.84, 3.85 fornecem importantes informações sobre o comportamento do sistema. Essas matrizes possuem determinantes iguais a 1, devido a existência de blocos de coeficientes iguais a zero. Os autovalores desta matriz são  $\mu = \{-1, 1\}$  com multiplicidade 2.

Os expoentes de Lyapunov ( $\Lambda$ ) [1, 29, 30] quantificam a taxa média de expansão ou contração das diferenças infinitesimais entre a trajetória principal e satélite. Eles são determinados pelos autovalores da *matriz Monodrômica* final. Esta matriz é gerada pela multiplicação das matrizes 3.80, 3.81, 3.84, 3.85. Com isso o expoente de Lyapunov é determinado por

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mu_i(t)\|, \quad (3.86)$$

sendo que  $\mu_i(t)$  é o  $i$ -ésimo autovalor de  $MT$  final.

Os autovalores da matriz final, iguais a  $-1$  e  $1$ , fazem com que os expoentes de Lyapunov sejam iguais a zero, como visto nos casos [9, 22, 23]. A suavidade das paredes, quando não há interação entre as partículas, não modifica o caráter regular do sistema. Consequentemente, podemos dizer que os expoentes de Lyapunov calculados para  $t \rightarrow \infty$ , serão iguais a zero independente do valor da razão de massas das partículas.

### 3.1.3 Expoentes de Lyapunov para partículas interagentes

Faremos construção semelhante a seção anterior, agora introduzimos forças de interação entre as partículas (duas forças constantes  $F^\pm$ ).  $F^+$  com sentido positivo no eixo  $x$  atuando sobre a partícula 2 e  $F^-$  com sentido negativo no eixo  $x$  atuando sobre a partícula 1.  $F^+$  e  $F^-$  tem módulos iguais. Utilizaremos a equação (3.59) para escrever a matriz no espaço tangente. Para a região 3 (colisão com a parede), na figura (3.3) e partícula 2, temos

$$F(x_i) = \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ F^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F[M(x_i)] = \begin{pmatrix} -\kappa v_i + 2V_i \\ \frac{2\mu}{M}v_i + \kappa V_i \\ F^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

onde  $\dot{v} = F^+$  representa a força constante. Usando a equação (3.59) têm-se:

$$\delta x_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta R_i \\ \delta v_i \\ \delta V_i \\ \delta a_{ri} \\ \delta a_{si} \end{pmatrix} + \quad (3.88)$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ F^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\kappa v_i + 2V_i \\ \frac{2\mu}{M}v_i + \kappa V_i \\ F^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \delta \tau.$$

Fazendo o produto matricial, podemos escrever a expressão acima na forma de equações

$$\delta r_f = \delta r_i + ((1 + \kappa)v_i - 2V_i)\delta\tau, \quad (3.89)$$

$$\delta R_f = \delta R_i + \left(-\frac{2\mu}{M}v_i + (1 - \kappa)V_i\right)\delta\tau \quad (3.90)$$

$$\delta v_f = -\kappa\delta v_i + 2\delta V_i + (\kappa - 1)F^+\delta\tau, \quad (3.91)$$

$$\delta V_f = \frac{2\mu}{M}\delta v_i + \kappa\delta V_i + \frac{2\mu}{M}F^+\delta\tau. \quad (3.92)$$

Neste caso, o tempo de atraso  $\delta\tau$  entre a colisão da trajetória principal e a colisão da trajetória satélite, é encontrado da derivada da integral da ação em relação à energia do sistema [23]

$$\delta\tau_j = \frac{\partial S_j}{\partial E_j} = m_j \int_{q_0}^q \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial E_j} dq_j = m_j \int_{q_0}^q \frac{dq_j}{\dot{q}_j}, \quad (3.93)$$

onde a integral da ação sendo expressa como [28]

$$S_j = \int p_j dq_j = \int m_j \dot{q}_j dq_j, \quad (3.94)$$

e lembrando que

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial E} = \frac{1}{m_j \dot{q}_j}. \quad (3.95)$$

Sabendo que

$$dq_{1(2)} = (-1)^{2(1)} \frac{m_{2(1)}}{M} dr + dR, \quad (3.96)$$

e

$$\dot{q}_{1(2)} = (-1)^{2(1)} \frac{m_{2(1)}}{M} v + V. \quad (3.97)$$

Substituindo essas duas expressões na integral para o tempo de atraso, obtemos

$$\delta\tau_j = -(A_j\delta R_i + B_j\delta r_i), \quad (3.98)$$

onde o índice  $j$  representa as partículas 1 e 2, e  $A_j$  e  $B_j$  são escritos como:

$$A_{1(2)} = \frac{M}{MV_i - (-1)^{1(2)}m_{2(1)}v_i}, \quad (3.99)$$

$$B_{1(2)} = -(-1)^{1(2)} \frac{1}{\delta r_i} \int_{r_0}^r \frac{m_{2(1)}dr}{MV_i - (-1)^{1(2)}m_{2(1)}v_i}. \quad (3.100)$$

Substituimos  $\delta\tau_2$  em (3.89), (3.90), (3.91) e (3.92), obtemos a matriz:

$$\begin{pmatrix} \delta r_f \\ \delta R_f \\ \delta v_f \\ \delta V_f \\ \delta a_{rf} \\ \delta a_{sf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\kappa + 1)B_2F^+ & -(\kappa + 1)A_2F^+ & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{2\mu}{M}B_2F^+ & -\frac{2\mu}{M}A_2F^+ & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r^i \\ \delta R^i \\ \delta v^i \\ \delta V^i \\ \delta a_{ri} \\ \delta a_{si} \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

Com a matriz monodrômica para a partícula 2, da forma:

$$MT_{Q_{2,3}} = \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\kappa+1)B_2F^+ & -(\kappa+1)A_2F^+ & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M}B_2F^+ & \frac{2\mu}{M}A_2F^+ & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

Utilizando o mesmo procedimento para a região 1 do degrau, obtemos

$$MT_{Q_{2,1}} = \begin{pmatrix} \psi_0^- & \chi_0^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\chi_0^- & \eta_0^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{M}\varrho_0^-B_2F^+ & \frac{m_1}{M}\varrho_0^-A_2F^+ & \zeta_0^- & \varrho_0^- & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{M}\varrho_0^-B_2F^+ & -\frac{\mu}{M}\varrho_0^-A_2F^+ & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

Para as regiões 2 e 4, ida e volta sobre o degrau, consideramos que a largura do degrau é muito pequena. Então o tempo que a partícula leva para atravessá-lo também será pequeno, ou seja, podemos tratar essa região como uma “colisão”<sup>2</sup> e podemos escrever as matrizes como

$$MT_{Q_{2,2}} = \begin{pmatrix} (1+B_2\Delta t_2F^+) & A_2\Delta t_2F^+ & \Delta t_2 & 0 & -\frac{\Delta t_2^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t_2 & 0 & -\frac{\Delta t_2^2}{2} \\ B_2F^+ & A_2F^+ & 1 & 0 & -\Delta t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\Delta t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

$$MT_{Q_{2,4}} = \begin{pmatrix} (1-B_2\Delta t_4F^+) & -A_2\Delta t_4F^+ & -\Delta t_4 & 0 & \frac{\Delta t_4^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta t_4 & 0 & \frac{\Delta t_4^2}{2} \\ B_2F^+ & A_2F^+ & 1 & 0 & \Delta t_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

A matriz que expressa a volta da partícula 2 pelo degrau (“descida do degrau”) é

$$MT_{Q_{2,5}} = \begin{pmatrix} \psi_0^+ & \chi_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\chi_0^+ & \eta_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{M}\varrho_0^+B_2F^+ & \frac{m_1}{M}\varrho_0^+A_2F^+ & \zeta_0^+ & \varrho_0^+ & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{M}\varrho_0^+B_2F^+ & -\frac{\mu}{M}\varrho_0^+A_2F^+ & \frac{\mu}{M}\varrho_0^+ & \xi_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

---

<sup>2</sup>Os eventos como: colisão com a parede, passagem pelo degrau e movimento sobre o degrau é tratado aqui como “colisões”, seguindo o procedimento utilizado por Dellago [23].

Para se obter a *matriz Monodrômica* final da forma da equação (3.56), devemos multiplicar as matrizes acima. Este procedimento analítico é extremamente complicado devido a existência de muitos termos diferentes nas matrizes gerando uma matriz final muito complexa, e não mostraremos esse resultado. É possível analisar essas matrizes sem precisar efetuar o procedimento dito anteriormente. Notamos que a diferença entre as matrizes de (3.81) à (3.85) e de (3.101) à (3.106), se dá através dos termos  $A_2 F^\pm$  e  $B_2 F^\pm$ , devido a força constante. Somente esses termos podem gerar expoentes de Lyapunov maiores do que zero, calculados através de (3.86), introduzindo um comportamento caótico no sistema.

As matrizes obtidas anteriormente podem ser generalizadas para  $N$  degraus com larguras e alturas variáveis, com o sistema ainda contendo duas partículas. Então, temos matrizes equivalentes às regiões 1 e 5 iguais a

$$MT_{Q_{j,n+1}} = (-1)^j \begin{pmatrix} \psi_n^\pm & \chi_n^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M} \chi_n^\pm & \eta_n^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{M} \varrho_n^\pm B_j F^\pm & \frac{m_1}{M} \varrho_n^\pm A_j F^\pm & \zeta_n^\pm & \varrho_n^\pm & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{M} \varrho_n^\pm B_j F^\pm & -\frac{\mu}{M} \varrho_n^\pm A_j F^\pm & \frac{\mu}{M} \varrho_n^\pm & \xi_n^\pm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Para as regiões equivalentes às regiões 2 e 4, têm-se

$$MT_{Q_{j,n+2}} = \quad (3.108)$$

$$(-1)^j \begin{pmatrix} (1 \pm B_j \Delta t_{n+2} F^\pm) & \pm A_j \Delta t_{n+2} F^\pm & \pm \Delta t_{n+2} & 0 & \frac{\mp \Delta t_{n+2}^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm \Delta t_{n+2} & 0 & \frac{\mp \Delta t_{n+2}^2}{2} \\ B_j F^\pm & A_j F^\pm & 1 & 0 & \mp \Delta t_{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mp \Delta t_{n+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{T_{j,N}} = (-1)^j \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\kappa + 1) B_j F^\pm & -(\kappa + 1) A_j F^\pm & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} B_j F^\pm & \frac{2\mu}{M} A_j F^\pm & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

com  $j = 1, 2$  representando as partículas 1 e 2.

Considerando a interação em cada colisão da partícula com a parede, a força de interação  $F^\pm$  é finita e os expoentes de Lyapunov podem ser positivos. O sistema possui comportamento caótico, devido as duplas colisões das partículas, ou seja, quando uma partícula, por exemplo a partícula 2, está próxima a parede da direita,



e a partícula 1 está próxima dessa partícula. Há então a colisão de 2 com a parede, e devido a forma que escrevemos as matrizes, a mesma partícula sente a interação da parede e da outra partícula. Esse evento pode acontecer várias vezes e  $A_j F^\pm$  e  $B_j F^\pm$  não serão necessariamente iguais a zero, resultando numa possível dinâmica caótica [9, 22]. Vale ressaltar que as alturas dos degraus estão contidos nos  $A_0^\pm$ , a interação entre as partículas nos termos  $A_j F^\pm$  e  $B_j F^\pm$  e as larguras dos degraus estão contidos nos  $\Delta t$ .

## 3.2 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos alguns resultados numéricos obtidos através dos resultados analíticos encontrados na seção anterior, para as figuras de (3.13) a (3.19). As figuras de (3.5) a (3.12) foram obtidas através da evolução temporal do sistema, sem a utilização das matrizes.

O sistema em questão é composto de duas partículas, denominadas de partícula 1, posicionada na parte esquerda do bilhar e à esquerda da outra partícula, dita 2 posicionada na parte direita do bilhar.

As paredes do bilhar são compostas por degraus de altura  $V_0$  e comprimento  $\Delta x$  variáveis. Para as simulações das figuras (3.5) a (3.12), adotamos a posição do começo do degrau em  $q = \pm 0,85$  e paredes posicionadas em  $-1,0$  e  $1,0$ . As partículas também estão sujeitas a interação entre elas, sendo esta uma força constante  $F^\pm$  de repulsão.  $F^+$  será aplicada à partícula da direita, tendo como sentido positivo do eixo  $x$  e  $F^-$  tem sentido negativo aplicada a partícula da esquerda. Obtemos então potenciais repulsivos da forma  $V_{1,int} = F^- q_1$  e  $V_{2,int} = -F^+ q_2$ . Os potenciais podem ser vistos na figura (3.4). Em nosso modelo podemos controlar a intensidade da

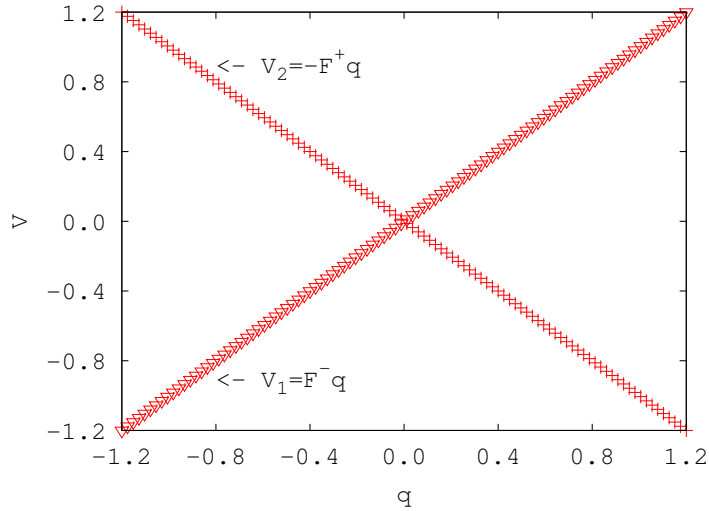


Figura 3.4: Potenciais gerados pelas forças constantes  $F^\pm = 1,0$  dentro do bilhar.

força, a largura, altura e número dos degraus, e é respeitada a conservação da energia no sistema ( $E = 1,0$ ).

Afim de observarmos a dinâmica do sistema, conforme variamos as paredes do bilhar e a interação entre as partículas, obtivemos as seções de Poincaré, algumas trajetórias e os expoentes de Lyapunov Máximos.

As seções de Poincaré são construídas da seguinte forma: quando a partícula 2 chega a parede da direita, marcamos a posição e o momento da partícula 1, sempre

quando a partícula 1 possui velocidade positiva.

Na figura (3.5) temos a seção de Poincaré para a partícula 1 (lado esquerdo do bilhar). Esta seção foi gerada com 70 trajetórias (em preto). A força de repulsão tem valor  $F = 0,3$ , para cada partícula, e com paredes rígidas sem degraus, ou seja,  $V_0 = 0$ . Neste caso as paredes possuem potencial infinito de maneira que a partícula colida com ela e inverta o sentido do seu momento. Nesta figura observamos ilhas de regularidade coexistindo com o mar caótico. Podemos ver claramente três grandes ilhas em  $p_1 = \pm 1,25$  e  $q_1 = 0,7$ , que representam órbitas periódicas<sup>3</sup> do sistema entorno de pontos elípticos<sup>4</sup>. Consideramos aqui o caso de massas iguais e energia igual a 1,0.

Na figura (3.5) a ilha em azul foi obtida com as condições iniciais  $q_1 = -0,3$  e  $p_1 = 1,1$ , e representa a trajetória quase regular da figura (3.6) e (3.7). Os pontos em vermelho foram obtidos com condição inicial igual a  $q_1 = 0,1$  e  $p_1 = 0,1$ . A trajetória que gerou esses pontos é caótica e pode ser vista na figura (3.8).

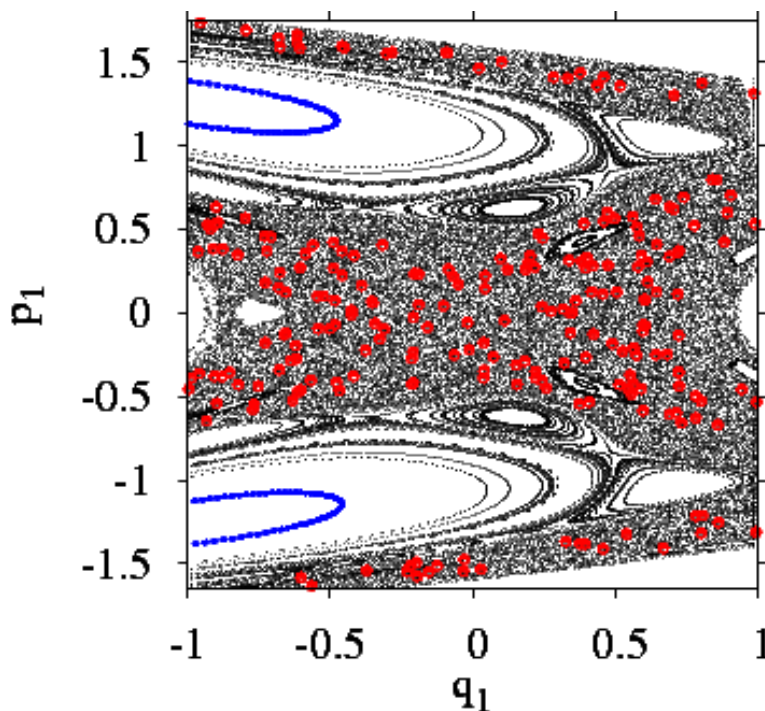


Figura 3.5: Seção de Poincaré para 70 trajetórias (em preto),  $F = 0,3$ ,  $V_0 = 0$ . Aqui as paredes estão posicionadas em  $-1,0$  e  $1,0$ . Em azul temos uma trajetória regular vista na figura (3.6). Os pontos em vermelho representam uma trajetória caótica vista na figura (3.8).

<sup>3</sup>De maneira simples, uma órbita periódica é aquela em que uma curva no espaço de fases é fechada, para um fluxo, ou um conjunto de pontos que se repete periodicamente para um mapa.

<sup>4</sup>Um ponto Elíptico é um ponto de equilíbrio estável (ver definição formal em [1, 26]), onde órbitas no espaço de fases tem formato de elipses.

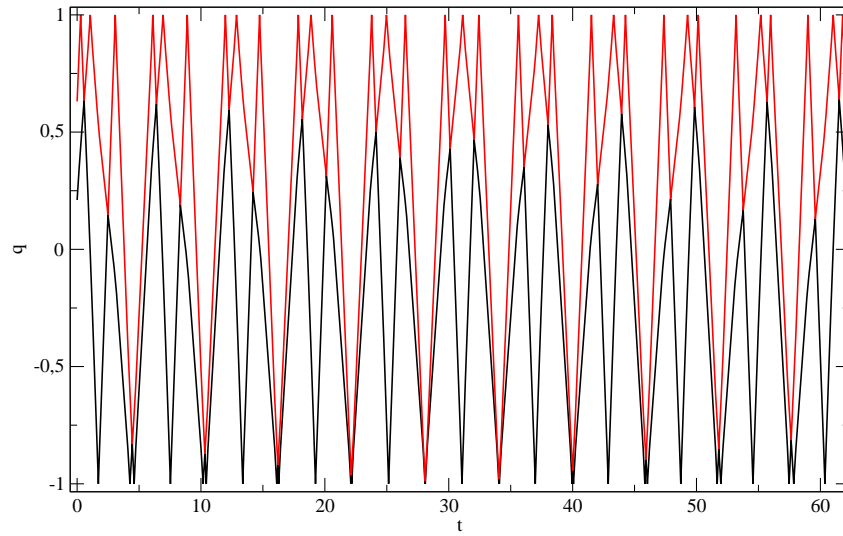


Figura 3.6: Trajetória periódica em função do tempo. Em vermelho temos a partícula 1 e em preto a 2. As colisões ocorrem quando as duas linhas se encontram.

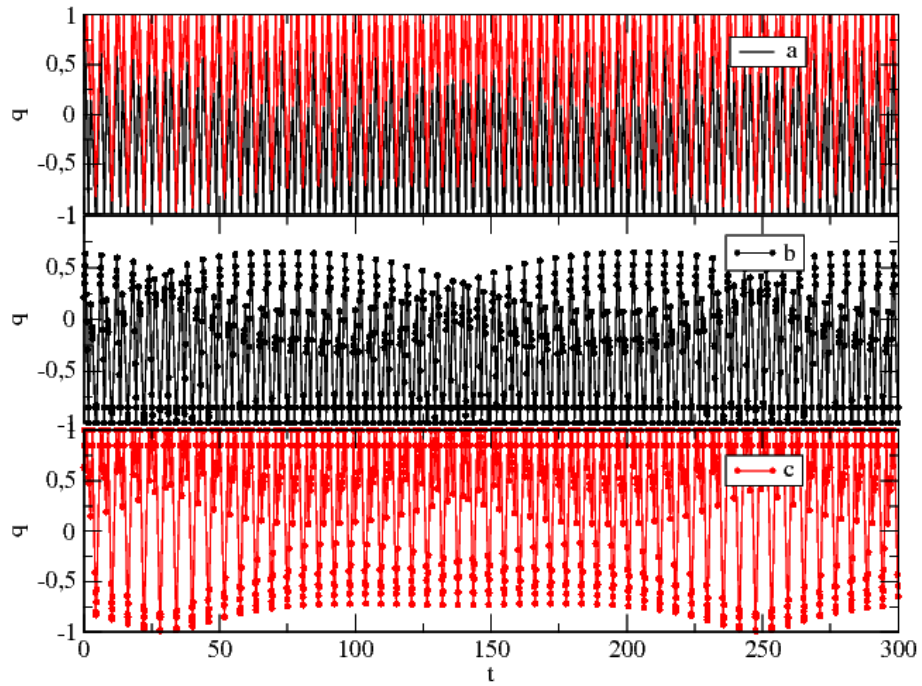


Figura 3.7: (a) Trajetória periódica em função do tempo. Em vermelho temos a partícula 1 e em preto a 2. Em (b) apenas a trajetória da partícula 2. (c) Trajetória da partícula 1 tirada de (a).

Na figura (3.6) temos as trajetórias das partículas 1 (vermelho) e 2 (preto). Estas apresentam dinâmica regular representando uma das ilhas na seção de Poincaré anterior. Na figura (3.7 - a, b, c) temos a mesma trajetória da figura (3.6), mas para

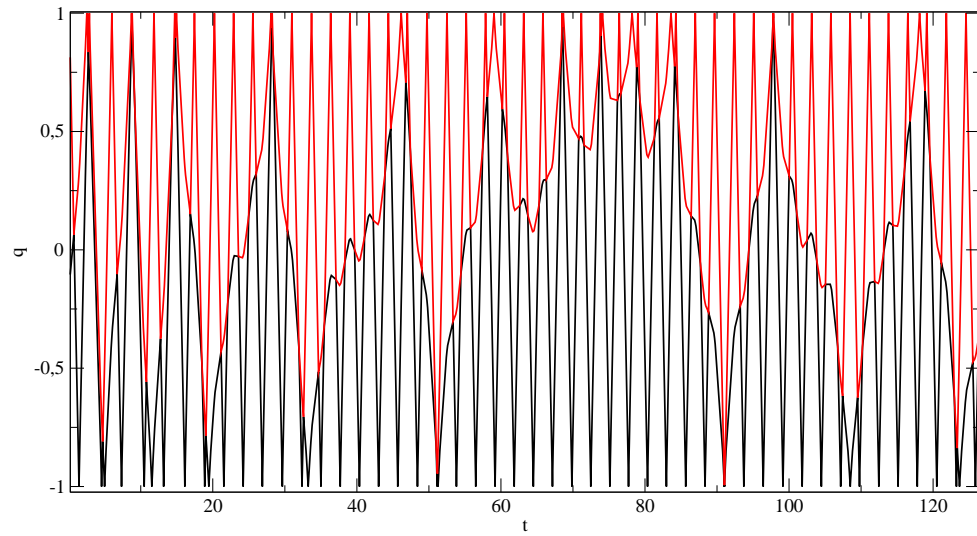


Figura 3.8: Trajetória caótica em função do tempo. Em vermelho temos a partícula 1 e em preto a 2. As colisões ocorrem quando as duas linhas se encontram.

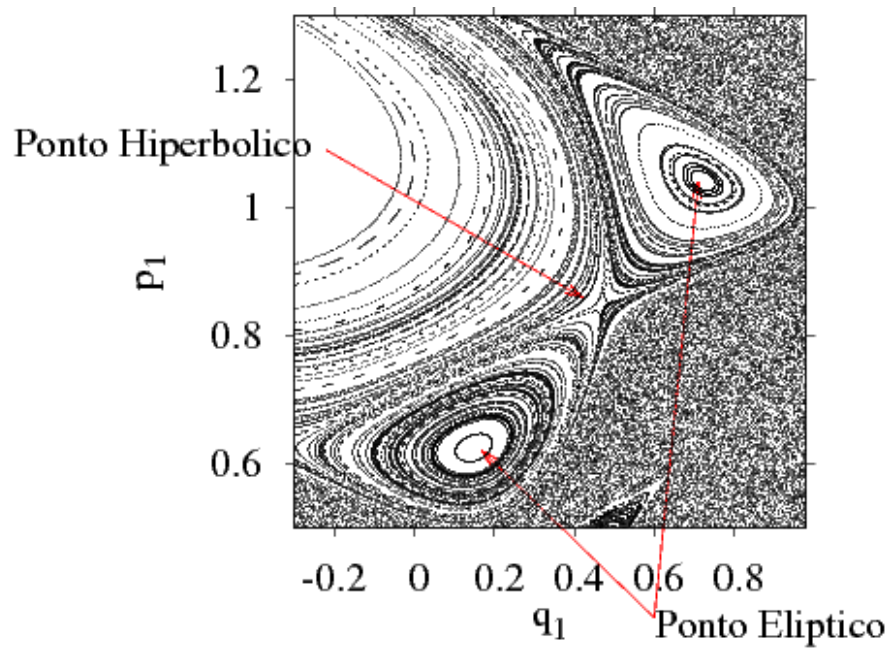


Figura 3.9: Ampliação da Seção de Poincaré da figura (3.5). Em destaque está o ponto Hiperbólico e dois pontos Elípticos.

um tempo maior, onde podemos observar melhor a periodicidade das duas órbitas. Em (3.7-a) temos a trajetória para a partícula 1 (em vermelho) e para a 2 (em preto). Em (3.7-b) colocamos apenas a trajetória da partícula 2 e em (3.7-c) a

trajetória da partícula 1. Observamos claramente em (3.7-b,c), através dos pontos, que as partículas apresentam movimento regular. Este tipo de trajetória gera as ilhas no espaço de fases como mostrado na seção de Poincaré.

Na figura (3.8) temos a representação das trajetórias caóticas das partículas, 1 vermelha e 2 preta, em função do tempo. Tal trajetória gera o mar caótico apresentado na figura (3.5) através dos pontos em vermelho.

Na figura (3.9) temos uma ampliação de uma região da seção de Poincaré (3.5). Esta figura mostra um ponto hiperbólico<sup>5</sup> cercado por dois pontos elípticos. Os pontos elípticos nos dizem que o sistema possui órbitas periódicas estáveis, ou seja, indicativo de movimento regular no sistema. Os pontos hiperbólicos (olhando para vários pontos na seção de Poincaré (3.5)) mostram que o sistema possui órbitas periódicas instáveis no espaço de fases.

Em (3.10) temos a seção de Poincaré para a partícula 1 com 150 trajetórias,  $F = 0,3$  e  $V_0 = 0,05$ . Para esse valor de altura do degrau as partículas possuem energia cinética suficiente para ultrapassá-los e chegar até as paredes. Comparando com os resultados da figura (3.5), observamos que há o aparecimento de regiões proibidas no espaço de fases entre  $\pm 0,85 < q_1 < \pm 0,5$  e  $-0,3 < p_1 < 0,3$ .

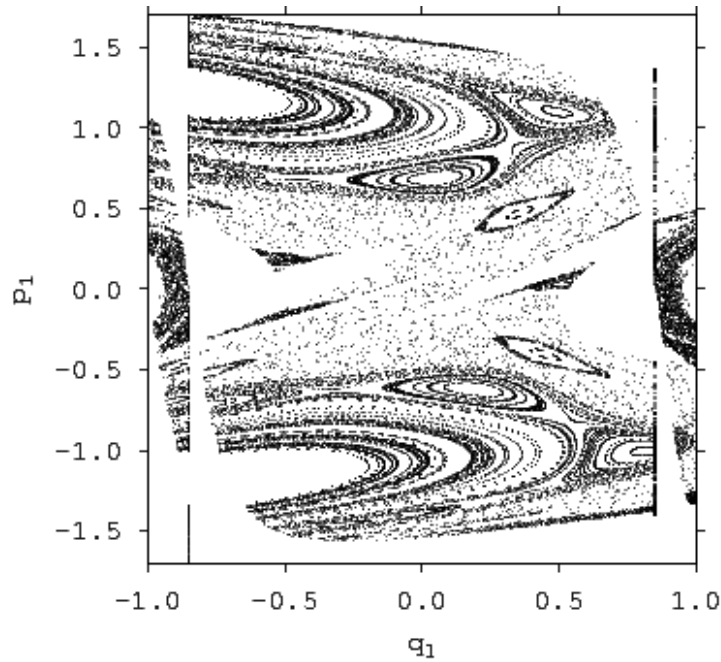


Figura 3.10: Seção de Poincaré para 150 trajetórias,  $F = 0,3$ ,  $V_0 = 0,05$ . Pode-se observar o aparecimento de regiões proibidas perto de  $p_1 = 0$  e  $q_1 = \pm 0,8$ .

Esse efeito, ocorre pela combinação da força aplicada e do potencial degrau, agora

<sup>5</sup>Um ponto Hiperbólico é um ponto de equilíbrio instável (ver definição formal em [1, 26]), onde órbitas no espaço de fases tem formato de hipérboles.

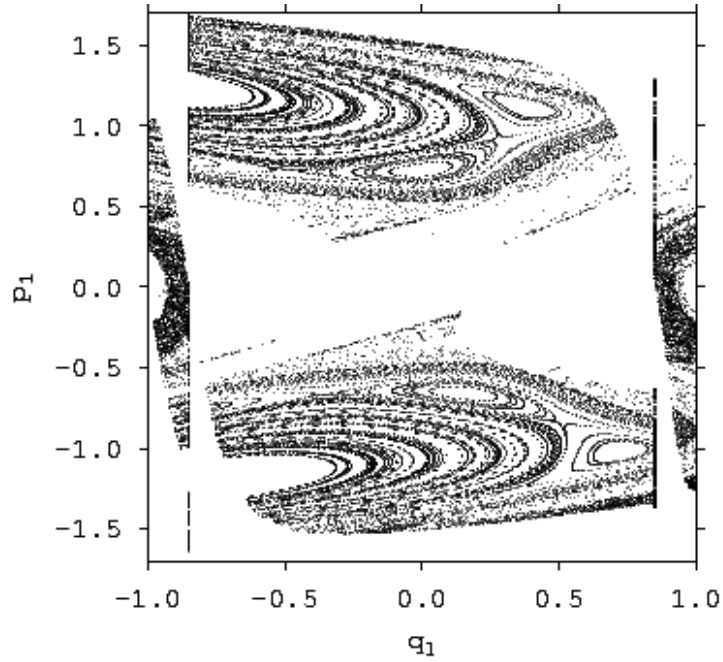


Figura 3.11: Seção de Poincaré para 150 trajetórias,  $F = 0,3$ ,  $V_0 = 0,1$ . Pode-se observar o aumento das regiões proibidas no espaço de fases.

existente. Testes numéricos mostraram que o sistema não evolui dinamicamente quando escolhemos uma condição inicial na região proibida.

Aumentando a altura do degrau para  $V_0 = 0,1$ , e mantendo a força em  $F = 0,3$ , obtemos a figura (3.11), onde pode-se verificar o aumento da região proibida no espaço de fases. As ilhas, que na figura (3.5) estavam em contato direto com a região caótica, agora estão envoltas por ilhas maiores.

Quando aumentamos a força de interação de  $F = 0,3$  para  $F = 0,5$ , com  $V_0 = 0,1$ , observamos na figura (3.12) o aparecimento da região caótica onde em (3.11) era uma região proibida. As ilhas menores desaparecem e sobrevivem apenas dois grandes aglomerados de ilhas. Notemos também, que nas figuras (3.10), (3.11) e (3.12) as regiões com densidade maior de pontos, nas regiões caóticas, os *stickiness*, ocorrem próximos de  $p_1 = 0$  e perto das paredes sobre os degraus, indicando o aparecimento de múltiplas colisões entre partícula-partícula e partícula-parede, ou seja, uma partícula colide com a parede e em seguida colide com a outra partícula sucessivas vezes.

As figuras de (3.13) a (3.19) mostram os expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito obtidos pelo formalismo construído na seção anterior, ou seja, usando as matrizes. Os expoentes de Lyapunov foram calculados para uma condição inicial específica, com  $q_1 = -0,1$ ,  $v_1 = -0,5$  e  $q_2 = 0,1$ ,  $v_2 = 0,5$ , ou seja, uma órbita periódica.



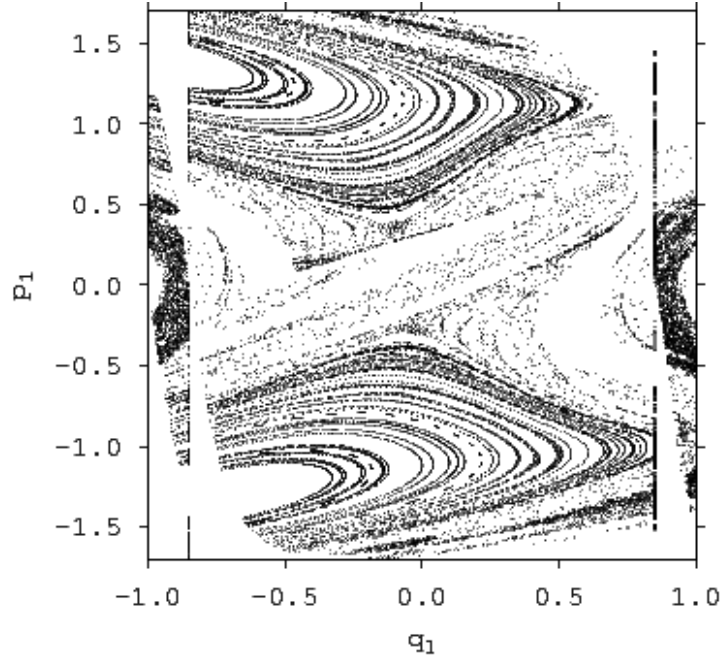


Figura 3.12: Seção de Poincaré para 150 trajetórias,  $F = 0,5$ ,  $V_0 = 0,1$ .

As partículas se deslocam para os degraus e depois para as paredes, caso possuam energia suficiente para transpor o degrau, colidem com as paredes e invertem seu sentido de movimento até encontrarem uma a outra. Para cada passagem pelos degraus, movimento sobre os degraus, colisão das partículas com as paredes e colisão entre as partículas geram uma matriz, como visto na seção anterior. Para calcular o expoente de Lyapunov devemos multiplicar todas as matrizes, ortonormalizar a matriz final (matriz Monodrômica) e calcular os autovalores ( $\mu_i$ ) para utilizar na equação

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mu_i\|, \quad (3.110)$$

com  $t$  sendo o tempo de evolução do sistema. Para estas simulações utilizamos  $\Delta x = 0,1$ , como comprimento do degrau, e altura  $V_0 = 0,1$ , ambos fixos. Repetimos todo esse processo para cada massa e força diferente.

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, são utilizadas as equações (3.102), (3.103), (3.104), (3.105) e (3.106). Adotando as condições iniciais citadas acima, e para um degrau fazemos a seguinte multiplicação das matrizes

$$\delta x_f = M_C \cdot MT_{Q2,8} \cdot MT_{Q2,5} \cdot MT_{Q2,4} \cdot MT_{Q2,3} \cdot MT_{Q2,2} \cdot MT_{Q2,1} \cdot MT_{Q2,7} \cdot \delta x_i \quad (3.111)$$

com  $M_c$  sendo a matriz de colisão da equação (3.11).  $MT_{Q2,7}$  e  $MT_{Q2,8}$  são as equações (3.104) e (3.105) adaptadas ao movimento das partículas fora dos degraus. Quando adicionamos mais degraus, as matrizes  $MT_{Q2,1}$ ,  $MT_{Q2,2}$ ,  $MT_{Q2,4}$  e  $MT_{Q2,5}$  são adicionadas a multiplicação (3.111).



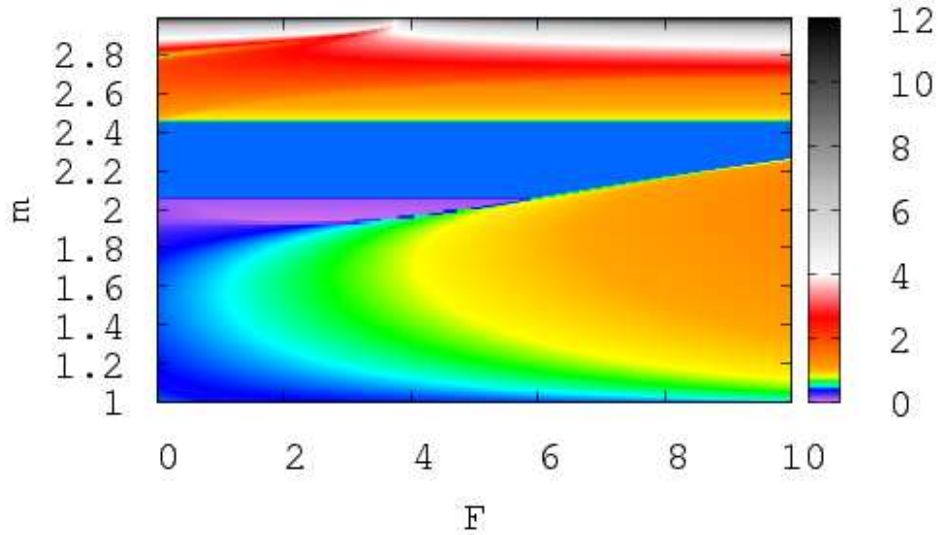


Figura 3.13: Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão  $F$ . Parede com um degrau com altura  $V_0 = 0,1$  e massa  $1, 0 \leq m_2 \leq 3,0$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em  $m_1 = 1,0$ .

Na figura (3.13) temos os expoentes de Lyapunov ( $\Lambda$ ) em função da massa da partícula 2 e da força que esta partícula sofre, no esquema de escala de cores. A figura (3.14) é uma ampliação da figura (3.13) para melhor visualização da variação dos expoentes de Lyapunov. Em (3.14) temos a variação de massa de  $2,7$  até  $3,0$ . Foi encontrado o espectro dos Expoentes de Lyapunov, quatro expoentes no total, com soma total igual a zero, mas apenas o Lyapunov máximo será analisado aqui.

Na figura (3.13) variamos a força constante de  $0,0$  até  $10,0$  e a massa da partícula 2 de  $1,0$  até  $3,0$ , mantendo  $m_1 = 1,0$  constante. Podemos observar nas figuras (3.13) e (3.14) um aumento do expoente de Lyapunov conforme o valor da força cresce, tendo como exceção a região de  $2,2 < m < 2,4$ . Em geral, quando a massa de uma partícula aumenta o sistema torna-se mais caótico.

Este comportamento é esperado, pois quando uma partícula aumenta sua massa e a outra se mantém fixa com força constante, uma das partículas recebe momento linear da outra através das colisões. Estas colisões podem ocorrer perto das paredes ocasionando, às vezes, uma sequência de colisões, ou seja, colisão de uma partícula com a outra e com a parede. Também é esperado que o comportamento dinâmico se torne mais caótico quando se aumenta a força de repulsão, fazendo com que as partículas sejam empurradas para as paredes. Quando aumentamos os dois parâmetros,  $F$  e  $m$ , a partícula com maior massa tende a ter menor velocidade, e a outra adquire maior velocidade. Isto faz com que umas das partículas fique “apri-

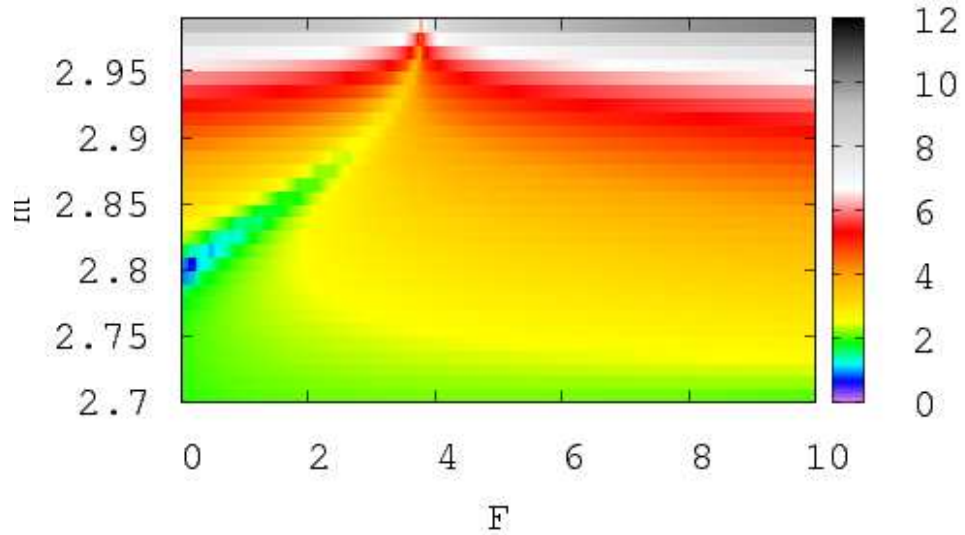


Figura 3.14: Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão  $F$ . Ampliação da região  $2,7 \leq m_2 \leq 3,0$  da figura (3.12). Caso de um degrau com  $V_0 = 0,1$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em  $m_1 = 1,0$ .

sionada” em um dos cantos do bilhar ocorrendo assim um maior número de múltiplas colisões.

A região entre  $2,1 \leq m \leq 2,5$ , na figura (3.13), apresenta uma redução drástica no valor do expoente de Lyapunov. Fisicamente, isto indica que o movimento do sistema encontrou uma região de *stickness* no espaço de fases, tornando o movimento quase regular. Matematicamente, temos uma combinação de parâmetros nas matrizes que levam a autovalores próximos a  $\{-1, 1\}$ . Não é possível mostrar exatamente quem influencia esse comportamento, pois temos um número grande de matrizes sendo multiplicadas, mas sabemos que, basicamente, as matrizes são compostas de termos contendo o potencial  $V_0$ , o parâmetro  $\kappa = (m_1 - m_2)/M$ , a massa reduzida  $\mu = (m_1 m_2)/M$ ,  $A_j$  e  $B_j$ , que dependem das massas e das velocidades. A combinação de certos valores, que é o caso dessa região, dos parâmetros citados, dentro da multiplicação das matrizes produzem a redução dos expoentes de Lyapunov.

A estabilidade do sistema, vista na figura (3.13) entre  $2,1 \leq m \leq 2,5$ , pode ser observada melhor através do espaço de fases da partícula 1, na figura (3.15). Esta figura foi feita com  $m_2 = 2,1$ ,  $F = 1,0$ ,  $V_0 = 0,1$ , e 100 trajetórias no caso de apenas um degrau. Observamos que há um aumento no número de ilhas em comparação com o caso de  $m_2 = 1,0$  (ver figura 3.12). Também é observado mais regiões com movimento quase regular, que são os pontos densos próximos das ilhas (os *stickness*). Como variamos apenas a massa da partícula 2, trataremos  $m_2 = m$ .

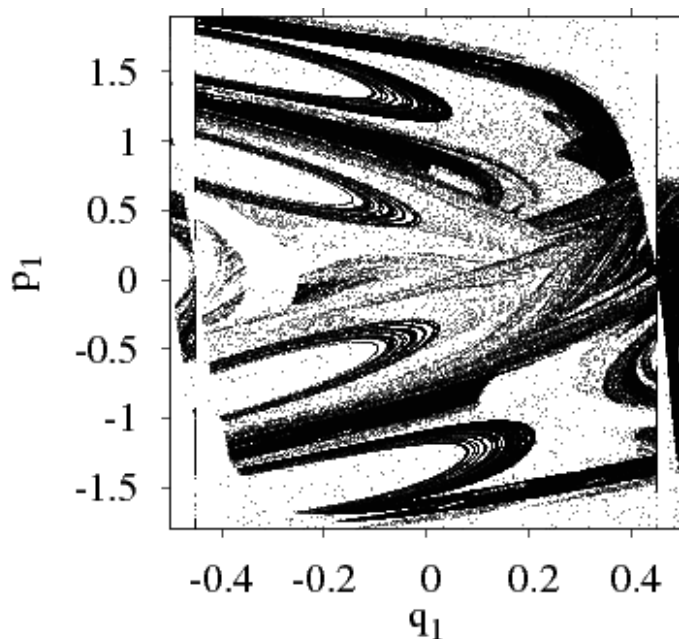


Figura 3.15: Seção de Poincaré para  $m_2 = 2, 1$ , força de repulsão  $F = 1, 0$  para um degrau com  $V_0 = 0, 1$ .

Na figura (3.16) temos o expoente de Lyapunov máximo a tempo finito para o bilhar contendo dois degraus em função da variação da massa da partícula 2 e da força de repulsão aplicada. A região de regularidade se alarga e muda de lugar na figura (3.16) em comparação com a figura (3.13). Outra região de movimento quase regular aparece a partir de  $m = 2, 8$  e  $F = 0$ , até quase  $F = 4, 0$  e  $m = 3, 0$ . Esta região pode ser vista melhor na figura (3.17).

Neste gráfico (3.16), existem mais regiões de movimento regular e quase regular para valores de massa que vão de 1, 7 a 2, 3, comparando ao caso com 1 degrau. Acima desses valores temos a elevação dos expoentes de Lyapunov ( $\Lambda > 0, 7$ ), indicando um comportamento caótico do sistema. Para dois degraus, duas outras regiões de *stickness* aparecem em  $m \approx 2, 6$  e outra aparece em  $m \approx 2, 8$ . Para um degrau, existem mais regiões com Lyapunov variando de  $0, 0 < \Lambda < 10, 0$  do que para dois degraus, mesmo que seus valores variem entre  $0, 0 < \Lambda < 16, 0$  acima de  $m > 2, 5$ . Este resultado indica que o sistema é mais regular quando aumentamos o número de degraus. Intuitivamente era de se esperar que esse comportamento aparecesse, pois conforme aumentamos o número de degraus, menos energia cinética a partícula possui. Isto é uma consequência da conservação de energia mecânica, quando a partícula está sobre o potencial do degrau.

Ampliações da figura (3.16) podem ser vistas na figura (3.17). Em (3.17), no topo, temos a ampliação da região com massas variando de 1, 0 até 2, 0. Nesta figura, podemos verificar que o sistema se encontra em regime caótico, com expoente

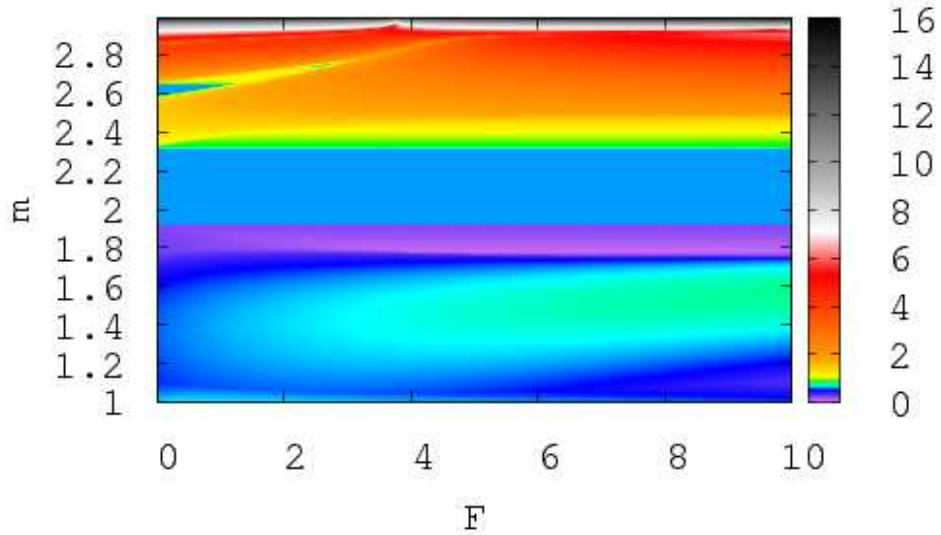


Figura 3.16: Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão  $F$ . Caso de dois degraus com  $V_0 = V_1 = 0,1$ , variando a massa de  $1,0 \leq m_2 \leq 3,0$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em  $m_1 = 1,0$ .

de Lyapunov  $\Lambda > 0,7$ , em grande parte da figura para forças maiores que  $2,0$ . Tendo como exceção a região com massa entorno de  $1,8$ . Na figura de baixo de (3.17) observamos as regiões de movimento quase regular entre  $m = 2,0$  e  $m = 2,3$ . Esta figura mostra uma região de movimento regular no sistema entre  $2,6 < m < 2,9$ , para força  $0,0 < F < 5,0$ .

Na figura (3.18) temos o expoente de Lyapunov Máximo a tempo finito para o bilhar com 3 degraus. Observamos que estes tem valores bem inferiores aos com um e dois degraus, mas mantém o mesmo padrão de comportamento. Esta figura foi feita para  $m = 0,0$  até  $3,0$ . Detalhes maiores da figura (3.18) podem ser vistos nas ampliações da figura (3.19). Observamos que o sistema apresenta grande variação dos expoentes de Lyapunov, indicando a variação do comportamento do sistema de quase regular para caótico. Com  $m > 1,6$ , surge uma região com expoente menor que  $0,2$ , consequência do movimento regular do sistema. Em (3.20) observamos a mesma região de regularidade apresentada no caso de um e dois degraus.

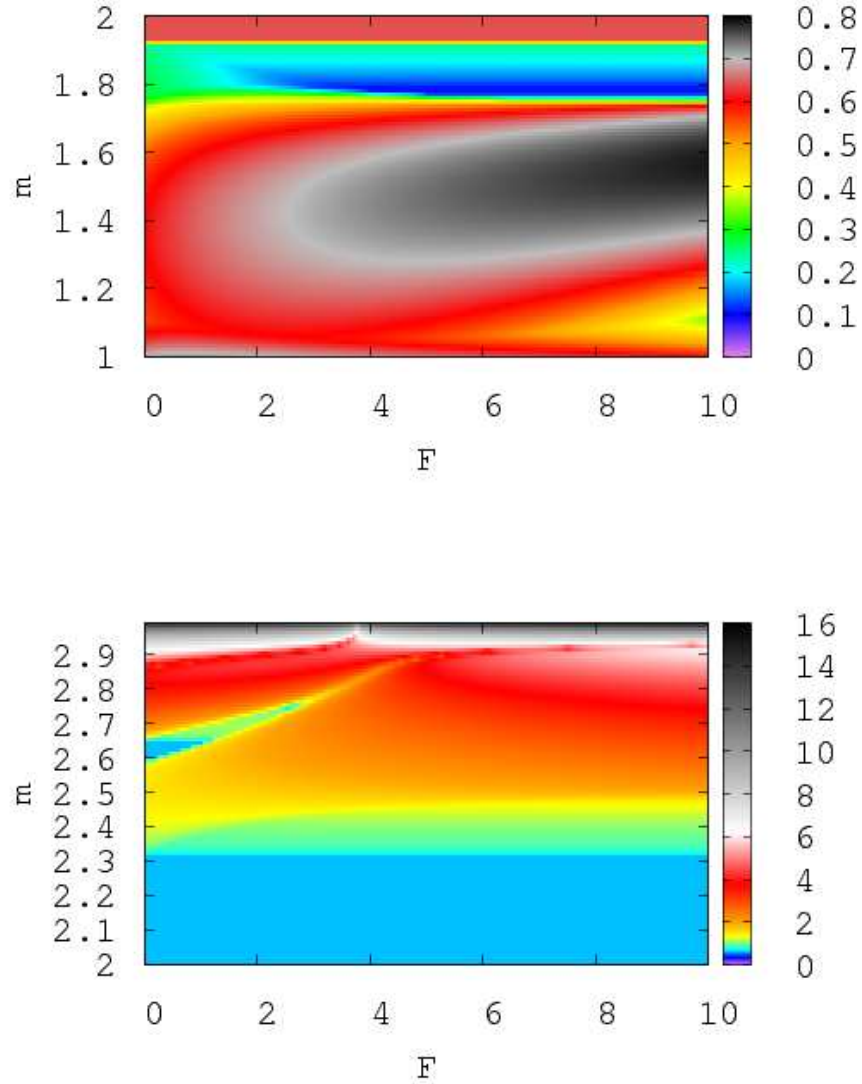


Figura 3.17: Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da massa da partícula 2 e da força de repulsão  $F$ . Ampliação da figura (3.14). Bilhar com dois degraus, com  $V_0 = V_1 = 0,1$  e massa de 1,  $0 \leq m_2 \leq 2$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em  $m_1 = 1,0$ .

### 3.3 Discussão dos resultados

Neste capítulo estudamos um sistema composto por duas partículas interagentes num bilhar unidimensional. A interação entre as partículas acontecia através de forças constantes. O objetivo desse estudo está em avaliar o comportamento dinâmico do sistema quando modificamos as paredes do sistema de suaves para rígidas. A metodologia empregada aqui visa modelar as paredes do bilhar através de

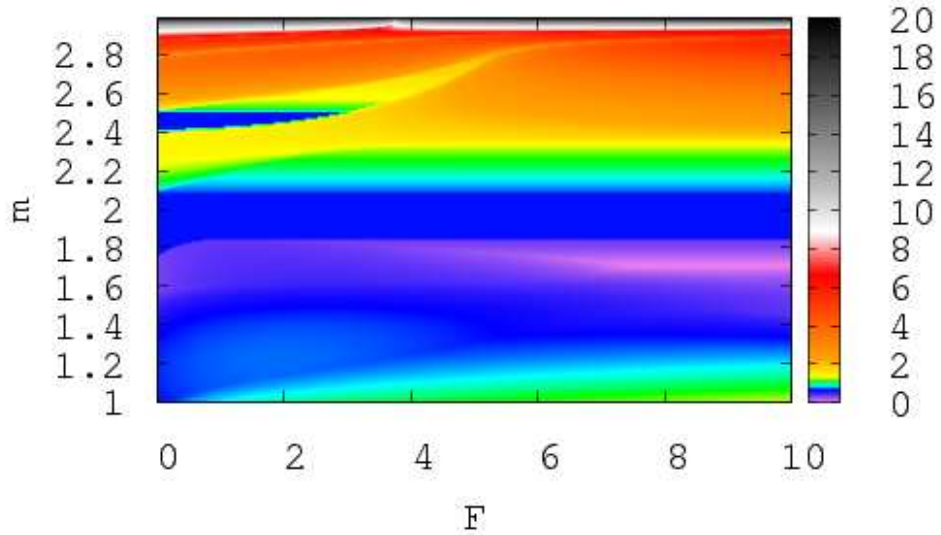


Figura 3.18: Expoentes de Lyapunov máximo para 3 degraus. Com  $V_0 = V_1 = V_2 = 0,1$  e massa variando de  $1,0$  até  $3,0$ . A massa da partícula 1 é mantida constante em  $m_1 = 1,0$ .

degraus, de forma que ajustando as larguras  $\Delta x$ , alturas  $V_0$  e o número de degraus possa-se obter qualquer função, como a função Erro ou Exponencial.

Neste trabalho utilizamos uma metodologia introduzida por Dellago *et al.* [23] onde cada evento no espaço real e de fases é descrito por uma matriz de transformação entre os estados final e inicial do sistema. Em nosso sistema as matrizes são obtidas no momentos em que as partículas se movem livremente pelo bilhar, quando passam por um degrau ou quando colidem com uma das paredes.

Primeiro obtivemos as matrizes que relacionam os estados inicial e final do sistema no espaço real sem interação entre as partículas, para o movimento livre antes de chegar a um degrau, para a passagem por um degrau, para o movimento livre sobre um degrau, para a colisão com a paredes e colisão entre as partículas. O estado do sistema é descrito pelas coordenadas e velocidade relativa e pelas coordenadas e velocidade do centro de massa das partículas. Dessa forma conseguimos descrever todo o sistema, em cada evento, com uma única expressão analítica.

Na sequência, encontramos as matrizes que relacionam os estados final e inicial do sistema no espaço de fases através de uma expressão obtida por Dellago. Utilizamos essa mesma metodologia para obter as matrizes do sistema quando há interação entre as partículas. Esta metodologia visa obter o comportamento do sistema sem ter que utilizarmos uma integração numérica para encontrar as soluções das equações de movimento do sistema.

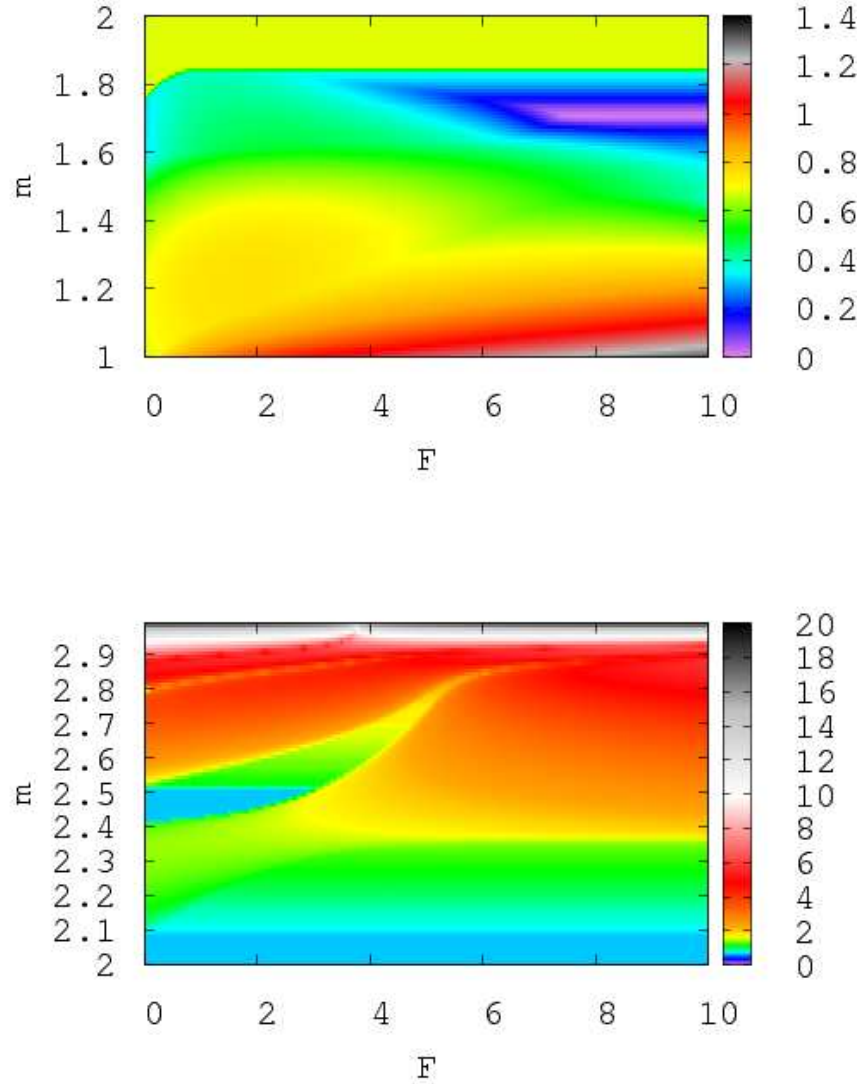


Figura 3.19: Expoentes de Lyapunov máximo para 3 degraos. Com  $V_0 = V_1 = V_2 = 0,1$  e massa variando de 1,0 até 2,0. Ampliação da figura (3.18). A massa da partícula 1 é mantida constante em  $m_1 = 1,0$ . No topo, a ampliação da figura (3.18) para variação de massa de 1,0 até 2,0. A figura de baixo é a ampliação da figura (3.18) para variação de massa de 2,0 até 3,0.

O objetivo de encontrar as matrizes no espaço tangente (espaço das derivadas) é de podermos calcular os expoentes de Lyapunov do sistema, que nos informa sobre seu comportamento dinâmico. Os expoentes são obtidos através dos autovalores da matriz final do sistema no espaço tangente. A matriz final aparece da multiplicação das matrizes de colisões (eventos) de cada trajetória, mas é possível avaliar o comportamento do sistema em cada matriz.



Podemos comparar dois casos distintos: sem interação e o com interação entre as partículas. Temos abaixo, nas equações (3.112), sem interação e o caso com interação (3.113) para a colisão das partículas com as paredes do bilhar.

Todas as matrizes obtidas tem seus determinantes iguais a 1, ou seja, são matrizes simpléticas e preservam o volume no espaço de fases.

$$MT = \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.112)$$

$$MT_{int} = \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\kappa+1)B_2F^+ & -(\kappa+1)A_2F^+ & -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M}B_2F^+ & \frac{2\mu}{M}A_2F^+ & \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.113)$$

Podemos observar que as diferenças entre essas matrizes ocorrem nos elementos (3,1), (3,2), (4,1) e (4,2). Para a matriz sem interação esses termos são iguais a zero, diferente das matrizes encontradas para o sistema com interação. Isso nos leva a uma informação importante quanto aos expoentes de Lyapunov. Os autovalores da matriz (3.112) tem como valores  $-1$  e  $1$ . Isso nos fornece expoentes de Lyapunov iguais a zero e a informação de que o sistema possui comportamento regular. A matriz (3.113), matriz com interação, tem autovalores diferentes de  $\pm 1$ , e os expoentes de Lyapunov podem ter valores diferentes de zero devido a uma combinação apropriada de termos que envolvem o degrau e a força de interação entre as partículas. Também devemos levar em consideração a colisão rígida entre as partículas quando estas possuem energia suficiente para vencer a força de repulsão. Esses dois resultados revelam um comportamento caótico no sistema.

Numericamente estudamos três casos de paredes: com um, dois e três degraus. Estudamos uma órbita periódica onde as partículas iniciam no centro do bilhar, com velocidades opostas se deslocando para as paredes. Estas passam por um (dois ou três) degrau(s), colidem com as paredes e retornam para o centro do bilhar até colidirem novamente. Utilizando as expressões analíticas obtidas calculamos os expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito.

No total temos seis expoentes de Lyapunov, com soma igual a 1, mas analisamos apenas o expoente máximo. Os expoentes são plotados em função da variação de massa da partícula 2 e da intensidade da força aplicada sobre as partículas.

Para um degrau, o expoente de Lyapunov possui valor maior que zero, revelando o comportamento caótico do sistema e a instabilidade da órbita adotada. Conforme a massa de uma das partículas aumenta, temos o crescimento do expoente



de Lyapunov. O mesmo acontece quando aumentamos a força de repulsão. Podemos notar algumas regiões onde o expoente reduz drasticamente, a valores próximos a zero. Essas regiões indicam a presença de *Stickiness*, onde o sistema apresenta movimento quase regular.

Comportamento semelhante aparece nos casos de dois e três degraus, mas pode ser visto o aumento das regiões onde o valor dos expoentes de Lyapunov são pequenos.

Seções de Poincaré mostram que o sistema possui alguns pontos de equilíbrio estável (pontos elípticos) cercado por ilhas e pontos de equilíbrio instável (pontos hiperbólicos) imersos num mar caótico. Esse comportamento indica que existem regiões caóticas e regulares no mesmo espaço de fases.

## Capítulo 4

### Três partículas num anel

Colisões de partículas com paredes rígidas em bilhares são usualmente descritas pela inversão instantânea do momento linear das partículas. A partir disto, relações analíticas simples das velocidades e ângulos antes e depois das colisões com as paredes podem ser obtidas. Contudo, para analisar a transição das paredes suaves, que são mais realistas, é essencial ter expressões analíticas para as equações de movimento bem definidas. Este trabalho sugere que potenciais para as paredes suaves apropriados são aqueles para o qual as forças correspondentes tornam-se “funções delta” ( $\delta$ ) no limite de paredes rígidas. Isto permite uma melhor investigação numérica da transição das paredes de suaves para rígidas. Uma Hamiltoniana geral escalonada é obtida para três partículas num anel sem atrito, que descreve bem a transição das paredes e mostra que a dinâmica ocorre dentro de um bilhar triangular com paredes suaves.

#### 4.1 Introdução ao bilhar triangular com paredes rígidas

É conhecido que o movimento de três partículas num anel sem atrito [56, 57, 58] com interação pontual é equivalente a uma partícula movendo-se livremente dentro de um bilhar triangular com ângulos

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 m_3}}, \quad \tan \beta = \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 m_3}}, \quad \tan \eta = \sqrt{\frac{m_3 M}{m_1 m_2}}, \quad (4.1)$$

e colidem elasticamente com os lados do triângulo. Aqui  $M = m_1 + m_2 + m_3$  e  $m_i$  é a massa das partículas ( $i = 1, 2, 3$ ).

A Hamiltoniana pode ser escrita como

$$H_B = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + \delta(q_2 - q_1) + \delta(q_3 - q_2) + \delta(q_1 - q_3 + L). \quad (4.2)$$

Neste caso as forças de interação entre as partículas também são representadas por funções delta, já que as equações de movimento para a Hamiltoniana (4.2) não são bem definidas devido as derivadas das funções delta.

As colisões ocorrem em  $q_1 = q_2$ ,  $q_2 = q_3$  e  $q_1 = q_3 - L$ , onde  $L$  é o comprimento da circunferência do anel. As colisões rígidas e pontuais entre as partículas 1 e 2 definem um lado do triângulo em  $q_1 - q_2 = 0$ , e a colisão dessas partículas com a partícula 3 define os outros dois lados do mesmo triângulo. Para  $m_3 \rightarrow \infty$  ( $\eta = \pi/2$ ) obtemos o bilhar triangular reto. Quando  $m_3 \rightarrow \infty$  a dinâmica de uma partícula dentro do bilhar triangular corresponde ao movimento de duas partículas  $m_1$  e  $m_2$  dentro de uma caixa unidimensional com paredes rígidas. Neste caso a interação entre as partículas 1 e 2 é pontual e as colisões são rígidas, a partícula 3 está fixa e representa as paredes de um bilhar 1D com paredes rígidas (ver fig. 4.1). Em

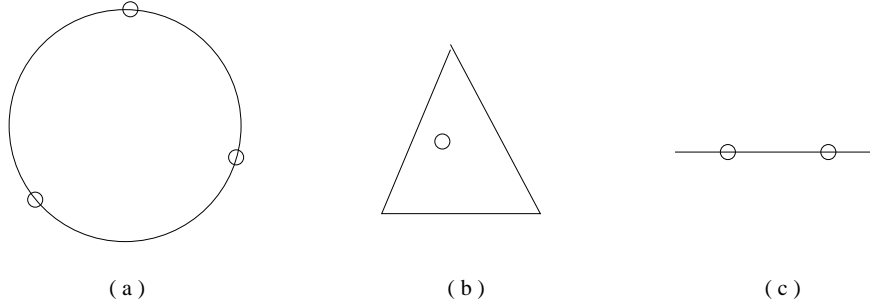


Figura 4.1: Representação de três partículas num anel em (a), em (b) uma partícula num bilhar triangular e em (c) duas partículas num bilhar unidimensional (caixa).

tais sistemas o expoente de Lyapunov é zero [18, 59] e toda a dinâmica pode ser monitorada pela mudança de ângulo do bilhar triangular.

Em seguida mostraremos os resultados principais encontrados por Casati *et al.* [7], que são similares aos observados no bilhar triangular. Usando as seções de Poincaré eles [7] mostraram que a dinâmica é não-ergódica se  $\theta$  é um múltiplo racional de  $\pi$ , onde

$$\cos(\theta) = \frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} = \Delta. \quad (4.3)$$

Mais especificamente, escrevendo  $\theta = \frac{m}{n}\pi$ , onde  $m$  e  $n$  são números inteiros, no máximo  $4n$  distintas velocidades aparecem. Por outro lado, quando  $\theta$  é um múltiplo irracional de  $\pi$ , as velocidades se tornam uniformemente densas [31] no espaço de velocidades.

É possível um sistema contendo duas partículas com interação pontual, ser ergódico no espaço de velocidades se  $\theta/\pi$  for irracional. Embora Casati and Ford [7] não tenham mostrado resultados explícitos para múltiplos irracionais de  $\pi$ , eles argumentaram que seus resultados numéricos fornecem elementos de prova do comportamento ergódico para o irracional  $\theta/\pi$  e que o crescimento no número de velocidades

pode ser demonstrado. Isto é observado para uma sequência de números racionais, que se aproximam de valores irracionais de  $\theta/\pi$ . Note que para  $\theta/\pi$  irracional, infinitos tempos podem ser necessários para observar todas as velocidades.

Embora existam infinitas razões de massas para que tenhamos valores racionais de  $\theta/\pi$ , alguns deles são especiais. O caso integrável, por exemplo,  $\gamma = 1/3$ , o qual resulta em  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  e  $\theta = \frac{2}{3}\pi$  (ou  $\pi/3$ ), respectivamente. Revendo os resultados para bilhar triangular, Eq. (4.3), [60] (ou mesmo para um bilhar poligonal [61]) é possível mostrar que para o caso integrável o genus<sup>1</sup> (veja figura (4.2)) é igual a  $g = 1$  (a superfície invariante do bilhar é um toro). Para todos os outros racionais de  $\theta/\pi$  a dinâmica é pseudointegrável<sup>2</sup> e o fluxo invariante não é um toro ( $1 \leq g < \infty$ ). Para genus  $g = 2$ , possíveis valores de  $\theta$  são [60]:  $\frac{1}{5}\pi$ ,  $\frac{2}{5}\pi$  e a razão de massas são  $\gamma \sim 0.1$  e  $\gamma \sim 1.9$ , respectivamente. Quando o genus cresce, as superfícies invariantes ficam mais complicadas. Portanto, além do caso integrável, o terceiro caso especial tem uma superfície invariante mais “simples”, é esperado que para casos pseudointegráveis  $\gamma \sim 1.9$  (não usamos  $\gamma \sim 0.1$  porque estamos interessados em valores de  $\gamma$  no intervalo  $[1, 4]$ ).

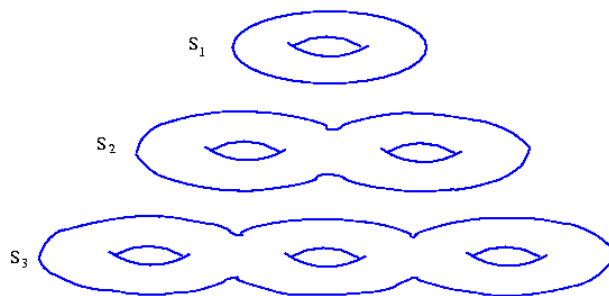


Figura 4.2: Figura esquemática dos Toros.  $S_1$  representa um toro com um genus.  $S_2$  representa um toro com dois genus e  $S_3$  representa um toro com três genus.

## 4.2 Resultados

### 4.2.1 Bilhar Triangular com paredes suaves

Como observado na Hamiltoniana (4.2), as colisões com a parede fixa, no bilhar 1D, são representadas por potenciais delta ( $\delta(x - x_0)$ ). Contudo, as equações de movimento correspondentes não são bem definidas. Portanto, para a transição de paredes rígidas para suaves precisamos descrever analiticamente as equações de movimento. Isso é feito através de interações suaves entre as partículas num anel e

<sup>1</sup>O genus representa o buraco no toro, assim a dinâmica do sistema fica contida em uma superfície que descreve um toro (uma “rosquinha”). Para genus maiores, temos vários toros ligados, por exemplo para genus igual a 2, temos dois toros grudados (duas rosquinhas grudadas).

<sup>2</sup>Outra maneira de chamar o movimento de quase-integrável (quase-regular).

em certo limite, a dinâmica do sistema é semelhante a de um sistema com colisões pontuais de uma caixa 1D com paredes rígidas.

Começando com a Hamiltoniana de três partículas num anel sem atrito escrita como

$$H_B = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + V_{12}\left(\frac{q_2 - q_1}{\sigma_{12}}\right) + V_{32}\left(\frac{q_3 - q_2}{\sigma_{32}}\right) + V_{31}\left(\frac{q_1 - q_3 + L}{\sigma_{31}}\right). \quad (4.4)$$

onde  $\sigma_{ij}$  define a suavidade de cada interação, então para  $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$  assumimos o limite de colisões pontuais. O potencial de interação  $V_{ij}$  entre as partículas depende apenas das posições relativas entre elas. A equação (4.2) apresenta interações rígidas entre as partículas e (4.4) possui interações suaves entre as partículas. Usando a transformação ortonormal [16]:

$$\begin{aligned} q_1 &= -\sqrt{\frac{m_3}{(m_1 + m_2)M}}x - \frac{1}{m_1}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}}y + \frac{z}{\sqrt{M}}, \\ q_2 &= -\sqrt{\frac{m_3}{(m_1 + m_2)M}}x + \frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}}y + \frac{z}{\sqrt{M}}, \\ q_3 &= \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{m_3 M}}x + \frac{z}{\sqrt{M}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

para as três partículas no anel, e a transformação linear  $x' = \beta x$ ,  $y' = \beta y$ ,  $z' = \beta z$ ,

$$\frac{d\tau}{dt} = \beta = \frac{1}{\sigma_{12}\sqrt{\mu_{12}}}, \quad (4.6)$$

a Hamiltoniana final modificada é escrita (sem as linhas)

$$\tilde{H}_B = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} + V_{12}(x, y) + V_{23}(x, y) + V_{31}(x, y), \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned} V_{12}(x, y) &= V_{12}(-y) \\ V_{32}(x, y) &= V_{32}\left[\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{32}}(ay - bx)\right] \\ V_{31}(x, y) &= V_{31}\left[\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}}(cy + bx) - \frac{L}{\sigma_{31}}\right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aqui

$$\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \gamma_{21}} \quad (4.9)$$

é a massa reduzida das partículas 1 e 2,  $\gamma_{ij} = m_i/m_j$  é a razão de massas entre as partículas  $i$  e  $j$ , e

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(1 + \gamma_{21})}, \\ b &= a \sqrt{\frac{\gamma_{21} + \gamma_{31} + 1}{\gamma_{32}}}, \\ c &= a \gamma_{21}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A energia total escalonada é  $\tilde{H}_B = E$  e ela é escrita em função das coordenadas, dos termos da suavidade ( $\sigma$ ), da interação entre as partículas 1 e 2 e da massa reduzida  $\mu_{12}$ .

Estas equações podem ser vistas na figura (4.3). Nesta figura a linha tracejada representa o movimento da parede. Quanto maior é o valor de  $L$ , mais rígida é a parede do bilhar. Isso pode ser visto melhor na figura (4.3) e na figura (4.4), onde temos dois valores de  $L$ , 10 e 100. A suavidade das paredes dependerão da forma do potencial  $V_{12}(x, y)$ ,  $V_{23}(x, y)$ ,  $V_{31}(x, y)$  e dos parâmetros  $\sigma_{12}, \sigma_{31}, \sigma_{23}$ . Portanto, independente do potencial, a partícula fica confinada num triângulo, como pode ser visto na figura (4.3). A figura (4.3) mostra uma linha tracejada no bilhar representando que a parede pode mudar de lugar quando modificamos o valor de  $L$ . Se  $L$  é pequeno, o bilhar é pequeno, se  $L$  é grande o bilhar também será.

Podemos fazer algumas observações sobre a Hamiltoniana (4.7).

- 1 - A dependência em  $z$  desaparece devido a simetria de translação da equação (4.7). Isto implica na conservação do momento linear total.
- 2 - Quando  $V_{31} = V_{23} = 0$ , a Hamiltoniana (4.7) é separável e integrável, como esperado;
- 3 - As coordenadas  $(x, y)$  aparecem, ao mesmo tempo, apenas nos potenciais de interação  $V_{31}(x, y)$  e  $V_{23}(x, y)$ . Dessa forma, apenas esses potenciais podem gerar um comportamento dinâmico caótico no sistema. Por outro lado, como veremos, uma escolha apropriada de interação pode gerar uma dinâmica integrável no anel.
- 4 - A suavidade afeta simultaneamente o centro de massa e as coordenadas relativas do sistema, desde que as razões  $\sigma_{12}/\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{12}/\sigma_{31}$  multipliquem as variáveis  $(x, y)$ . Estas quantidades não mudam os ângulos do bilhar.
- 5 - Mudando a razão de massas, mudam-se os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  separadamente. Apenas estas quantidades podem mudar os ângulos do bilhar.

6 - Mantendo a razão de massas constante a suavidade dentro do bilhar é controlada por  $\sigma_{12}/\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{12}/\sigma_{31}$  e  $L/\sigma_{31}$ . O limite de paredes rígidas pode ser obtido fazendo  $L/\sigma_{31} \rightarrow \infty$ , ou seja, a parede  $V_{31}$  pode se mover (veja fig. (4.3)).

Fazendo os termos, de dentro dos colchetes, de (4.8) iguais a zero, temos a definição dos lados de um triângulo iguais a

$$y = 0, \quad y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{c}x + \frac{L}{\sigma_{12}}. \quad (4.11)$$

Como nós veremos mais a frente, para simulações numéricas específicas, a Hamiltoniana (4.7) pode ter sua dinâmica representada pela dinâmica de uma partícula dentro de um potencial triangular, como na figura (4.3).

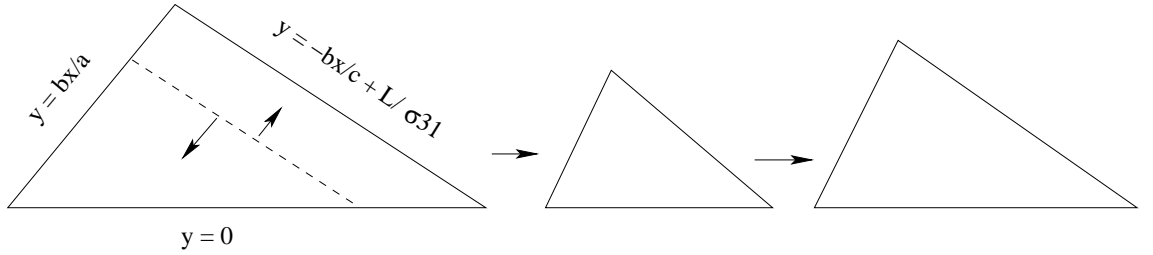


Figura 4.3: Figura esquemática do bilhar triangular com paredes suaves. A figura mostra a parede (linha tracejada) que pode se mover.

A Hamiltoniana é bastante geral. Qualquer potencial  $V_{12}$ ,  $V_{23}$ ,  $V_{31}$  de interação entre as partículas pode ser utilizado, como o potencial de Coulomb

$$V_C = \frac{V_0}{q_2 - q_1} = \frac{1}{r}, \quad (4.12)$$

de Yukawa

$$V_{YU} = \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{r}, \quad (4.13)$$

Wood-Saxon

$$V_{WS} = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}, \quad (4.14)$$

Arcotangente

$$V_{ARC} = -V_0 \text{Arctg}(r), \quad (4.15)$$

polinomial entre outros.

## 4.2.2 Aplicação das Funções “Erro” e “Exponencial”

Nesta seção sugerimos uma escolha apropriada de potencial para substituímos em (4.7) e observarmos a transição das paredes, de suave para rígida.

Adotaremos as funções Erro e Exponencial. Essas funções são expressas como

$$V_{exp}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|/\sigma}, \quad (4.16)$$

$$V_{erf}(x) = \frac{1}{2}Erf\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad (4.17)$$

Nestas equações podemos multiplicar e adicionar um potencial constante  $V_0$  para controlar suas amplitude e altura.

A força de interação das paredes sobre as partículas é obtida por  $F(x) = -\nabla V$ . Em uma dimensão, apenas em  $(x)$ , temos  $F(x) = -\frac{d}{dx}$ . Então as forças de interação dos potenciais das funções Erro e exponencial são

$$F_{exp}(x) = \frac{1}{2\sigma}e^{-|x|/\sigma}, \quad (4.18)$$

$$F_{erf}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\sigma^2}, \quad (4.19)$$

Na equação (4.18) estamos utilizando o módulo de  $F_{exp}$  para encontrarmos paredes positivas. Para obtermos paredes rígidas devemos fazer  $\sigma \rightarrow 0$ , então

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} F_{funcao}(x) = \delta(x). \quad (4.20)$$

Substituindo as funções erro e exponencial acima na Hamiltoniana (4.8), temos

$$H_B^{exp} = K + 2 \left[ e^{(-y)} + e^{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}(ay-bx)} + e^{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}}\left(cy+bx-\frac{L}{\sigma_{31}}\right)} \right], \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} H_B^{erf} &= K + Erf(-y) + Erf\left[\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}(ay-bx)\right] \\ &+ Erf\left[\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}}\left(cy+bx-\frac{L}{\sigma_{31}}\right)\right] + V_0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde  $K$  é a soma das energias cinéticas

$$K = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} \quad (4.23)$$

O termo  $V_0$  em  $H_B^{erf}$  e o número 2 em  $H_B^{exp}$  fazem com que as duas dinâmicas sejam equivalentes e possuam mesma energia.

As equações de movimento para a função exponencial são:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_B^{exp}}{\partial p_x} = p_x, \quad (4.24)$$



$$\dot{y} = \frac{\partial H_B^{exp}}{\partial p_x} = p_y, \quad (4.25)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H_B^{exp}}{\partial x} = -2b \left[ \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}} e^{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}}(cy+bx-\frac{L}{\sigma_{31}})} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}} e^{\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}(ay-bx)\right)} \right], \quad (4.26)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H_B^{exp}}{\partial y} = -2 \left[ c \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}} e^{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}}(cy+bx-\frac{L}{\sigma_{31}})} + a \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}} e^{\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}(ay-bx)\right)} - e^{-y} \right]. \quad (4.27)$$

As equações de movimento para a função erro são:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_B^{erf}}{\partial p_x} = p_x, \quad (4.28)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H_B^{erf}}{\partial p_y} = p_y, \quad (4.29)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H_B^{erf}}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} b \left[ \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}} e^{\left[-\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}}\right)^2 (cy+bx-\frac{L}{\sigma_{31}})^2\right]} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}} e^{\left[-\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}\right)^2 (ay-bx)^2\right]} \right], \quad (4.30)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H_B^{erf}}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ c \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}} e^{\left[-\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{31}}\right)^2 (cy+bx-\frac{L}{\sigma_{31}})^2\right]} + a \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}} e^{\left[-\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}\right)^2 (ay-bx)^2\right]} - e^{-y} \right]. \quad (4.31)$$

### 4.2.3 Resultados numéricos - paredes suaves

Nesta seção utilizaremos os resultados analíticos obtidos na seção anterior. Plotando o potencial das funções Exponencial e Erro das equações (4.21) e (4.22), respectivamente, obtemos as figuras (4.4) e (4.5).

A figura (4.4) está organizada da seguinte forma:

- 1 - A esquerda temos plotados os potenciais para a função exponencial, com paredes suaves em (a), na parte superior esquerda, e paredes rígidas em (c), na parte inferior esquerda.
- 2 - Na direita temos os potenciais para a função erro, com paredes suaves em (b), na parte superior direita, e paredes rígidas em (d), na parte inferior direita.

Os bilhares triangulares das figuras (4.4), (a) e (b), tem lado igual a  $L/\sigma_{31} = 5,0$ . A grandeza  $L/\sigma_{31} = 5,0$  define a suavidade ou rigidez do bilhar, e neste caso o bilhar possui paredes suaves. Os potenciais das figuras (4.4), (c) e (d), tem lado igual a  $L/\sigma_{31} = 20,0$ . Neste caso o bilhar possui paredes rígidas.

Nesta parte do trabalho estudaremos dois casos distintos de paredes, o caso suave, com  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e o caso rígido, com  $L/\sigma_{31} = 20,0$ . O potencial da função exponencial foi plotado com o módulo do argumento, pois sem ele a função não gera uma região delimitada de aprisionamento da partícula, ou seja, não define um bilhar. Para todas estas figuras, (4.4) fazemos massas iguais e suavidades iguais, com  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ .

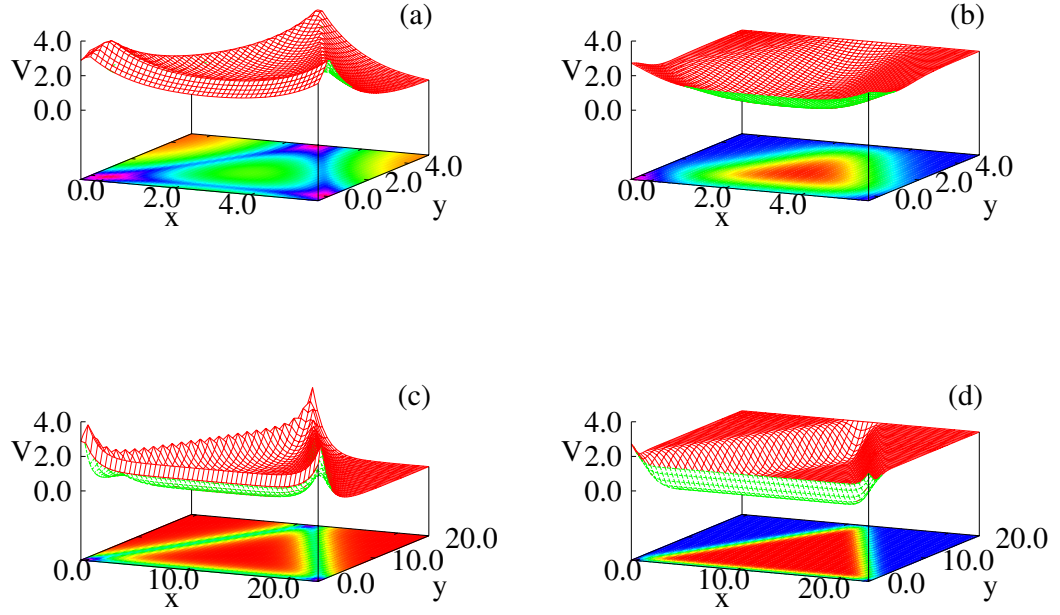


Figura 4.4: Potencial das paredes do bilhar para a função exponencial (a esquerda), figuras (a) e (c), e da função erro (a direita), figuras (b) e (d), para o caso de massas iguais e suavidades iguais com  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ . Aqui temos o caso de paredes suaves (no topo), figuras (a) e (b), para  $L/\sigma_{31} = 5,0$ . O caso de paredes rígidas (abaixo), pode ser visto nas figuras (c) e (d), para  $L/\sigma_{31} = 20,0$ .

A figura (4.5) está organizada da seguinte forma:

- 1 - A esquerda temos plotados os potenciais para a função exponencial, com paredes suaves em (a), na parte superior esquerda, e paredes rígidas em (c), na parte inferior esquerda.
- 2 - Na direita temos os potenciais para a função erro, com paredes suaves em (b), na parte superior direita, e paredes rígidas em (d), na parte inferior direita.

Os bilhares triangulares das figuras (4.5), (a) e (b), tem lado igual a  $L/\sigma_{31} = 5,0$ , caso de paredes suaves. Os potenciais das figuras (4.5), (c) e (d), tem lado igual a  $L/\sigma_{31} = 20,0$ . Neste caso o bilhar possui paredes rígidas. Para todas estas figuras, (4.5) fazemos suavidades iguais, com  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$  e razão de massas iguais a  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ .

Podemos notar que, quando modificamos a razão de massas das partículas, os ângulos do bilhar (do triângulo) mudam, mas não afetam a suavidade/rigidez das paredes. Isso pode ser visto nas equações (4.11). Quem controla a suavidade das paredes do bilhar são os parâmetros  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{31}$ , nos potenciais (4.7), como fizemos  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1$  o único agente modificador das paredes é o parâmetro  $L/\sigma_{31}$ ,

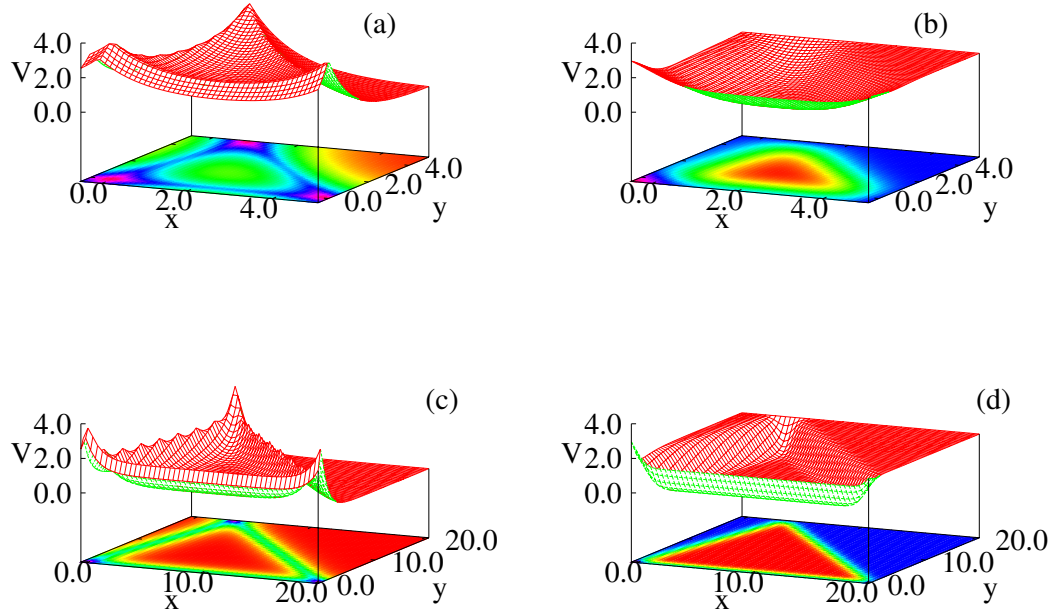


Figura 4.5: Potencial das paredes do bilhar para a função exponencial (em (a) e (c)) e da função erro (em (b) e (d)), para o caso de suavidades iguais, com  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$  e razão de massas iguais a  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ . As paredes suaves são apresentadas em (a) e (b) e as paredes rígidas em (c) e (d), para  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e  $L/\sigma_{31} = 20,0$ , respectivamente.

neste caso somente o  $L$ .

Através das equações de movimento, obtidas anteriormente e descritas pelas equações de (4.24) a (4.31), encontramos numericamente as seções de Poincaré do sistema, que podem ser vistas nas figuras (4.6), (4.7)-(a), (4.8), (4.12) e (4.13). Estas figuras foram feitas com 400 condições iniciais, tempo de evolução de 4000 e integrador numérico Runge-Kutta de quarta ordem. As seções de Poincaré são obtidas da seguinte forma: quando a partícula possui momento positivo ( $p_x > 0$ ), no eixo  $x$ , e passa pelo centro do bilhar em  $x$ , anotamos a sua posição no eixo  $y$  e seu momento  $p_y$ . A energia total do sistema é mantida em  $E = 2$ . Esta é a energia máxima que as partículas podem assumir para que continuem confinadas dentro do bilhar.

A figura (4.6) apresenta o caso de paredes modeladas pela função exponencial com suavidades e massas iguais, ou seja,  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ , com lado igual  $L/\sigma_{31} = 5,0$ . Neste caso temos um bilhar com paredes suaves. A dinâmica é regular (integrável), e cada trajetória viaja ao longo de um toro irracional invariante. É possível observar dois pontos de equilíbrio estáveis (pontos elípticos), na linha de  $p_y = 0$ , cercados por infinitos toros ou órbitas elípticas. Quando é escolhida

uma condição inicial igual a um desses pontos a partícula deixa de se movimentar pelo bilhar.

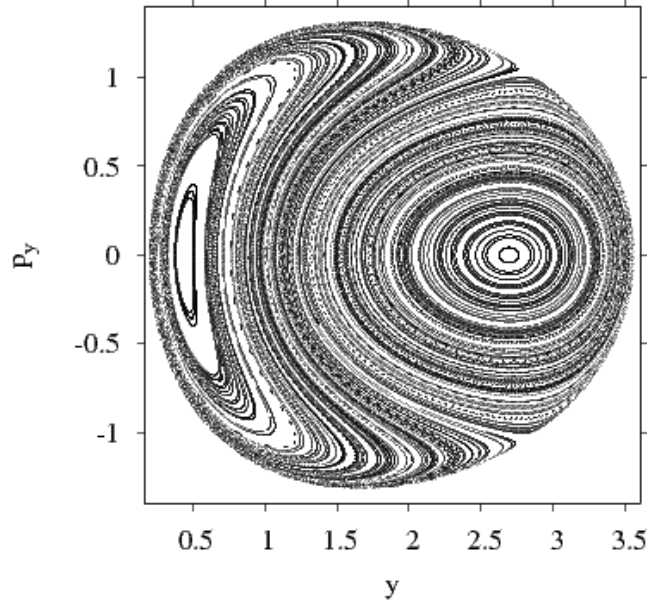


Figura 4.6: Seção de Poincaré para a função exponencial, para o caso de massas iguais e suavidades iguais com  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ . Aqui temos o caso suave para  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e 400 trajetórias.

Na figura (4.7)-(a) temos a seção de Poincaré idêntica a figura (4.6), mas destacamos um toro, em vermelho, que representa uma trajetória no espaço real da partícula dentro do bilhar. Esta trajetória pode ser vista na figura (4.7)-(b). Certos pontos da trajetória chegam muito próximos de serem fixos, ou seja, de se repetirem num certo tempo, mas como dissemos anteriormente, estamos tratando de um toro irracional e essa trajetória nunca se fecha. Esta é uma trajetória dita quase-regular. Este comportamento pode ser visualizado nas figuras (4.7)-(c) e (4.7)-(d), onde temos as séries temporais do sistema para  $(x \times t)$  e  $(y \times t)$ , respectivamente.

Quando a dinâmica do sistema, com paredes modeladas pela função erro em  $H_B^{erf}$ , é analisada podemos ver um movimento quase-regular para o caso de paredes suaves. A figura (4.8) mostra que o sistema apresenta ilhas de movimento quase-regular e regular representado pelos pontos elípticos. Contudo, alguns pontos hiperbólicos estão presentes e geram um movimento caótico.

Algumas ilhas, referentes as trajetórias quase-regulares, foram destacadas da figura (4.8) em (4.9). As trajetórias são mostradas na figura (4.10) em maior destaque no espaço real  $(y \times x)$ .

A figura (4.9) apresenta cinco ilhas destacadas na seguinte ordem:

- (I) Três ilhas em verde localizadas em  $y \approx 0,8$  e  $y \approx 1,6$ , entorno de três pon-

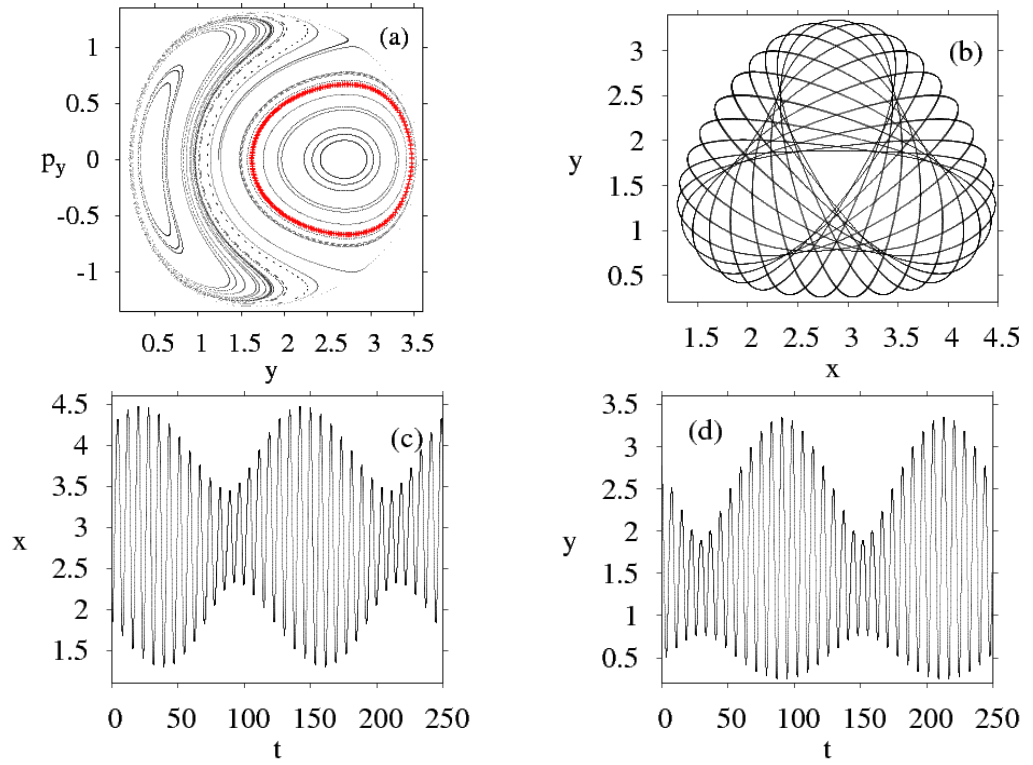


Figura 4.7: Na figura (a) temos a seção de Poincaré para a função exponencial, a mesma da figura (4.6). Esta figura apresenta os pontos no espaço de fases (em vermelho) da trajetória ao lado (figura (b)). Em (c) e (d) temos a série temporal desta trajetória, para  $x$  e  $y$  em função do tempo, respectivamente.

tos elípticos;

(II) Uma ilha em vermelho localizada em  $y \approx 1, 1$ , entorno de um ponto elíptico no centro da seção de Poincaré;

(III) Uma ilha em azul claro localizada em  $y \approx 2, 5$ , entorno de outro ponto elíptico;

(IV) Uma ilha em azul localizada em  $y \approx -0, 5$ . No seu centro também há um ponto elíptico;

(V) Três ilhas em rosa localizadas em  $y \approx -0, 7$ ,  $y \approx 0, 3$  e  $y \approx 0, 7$ .

As trajetórias correspondentes são apresentadas na figura (4.10) de (I) a (V). Todas as trajetórias da figura (4.10) são quase-periódicas (quase-regulares), pois elas circundam pontos fixos, mas nunca se fecham.

O movimento da trajetória (V) pode ser visto na figura (4.11)-(a) e (b). Nestas duas figuras temos a série temporal do sistema para  $(x \times t)$  e  $(y \times t)$ . Em  $x$  a partícula chega muito próxima a seis pontos distintos. Podemos dizer que em  $x$  o sistema quase apresenta um período 6, mas devemos lembrar que esta trajetória nunca se fecha, então isso nos diz que existem seis pontos elípticos no qual estes toros circundam. Na figura (4.9) podemos ver apenas três pontos. Uma trajetória iniciada em um desses toros, próximos aos pontos fixos, percorrem todos os outros toros dessa

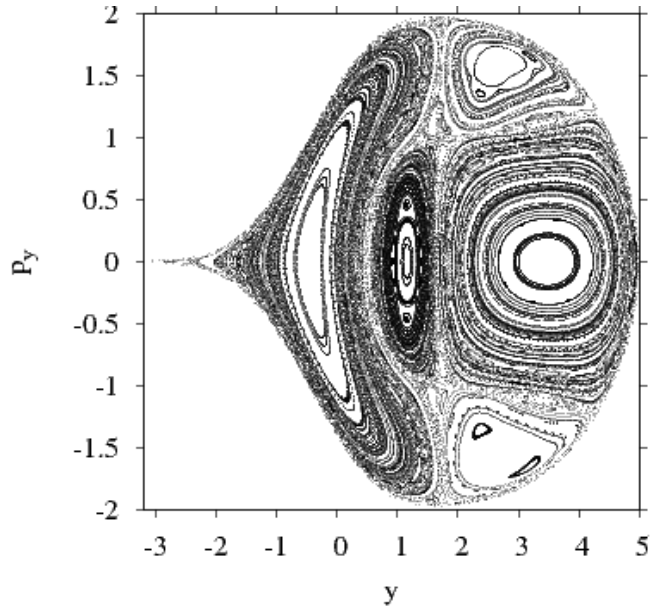


Figura 4.8: Seção de Poincaré para a função erro, para o caso de massas iguais e suavidades iguais com  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ . Aqui temos o caso suave para  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e 400 trajetórias.

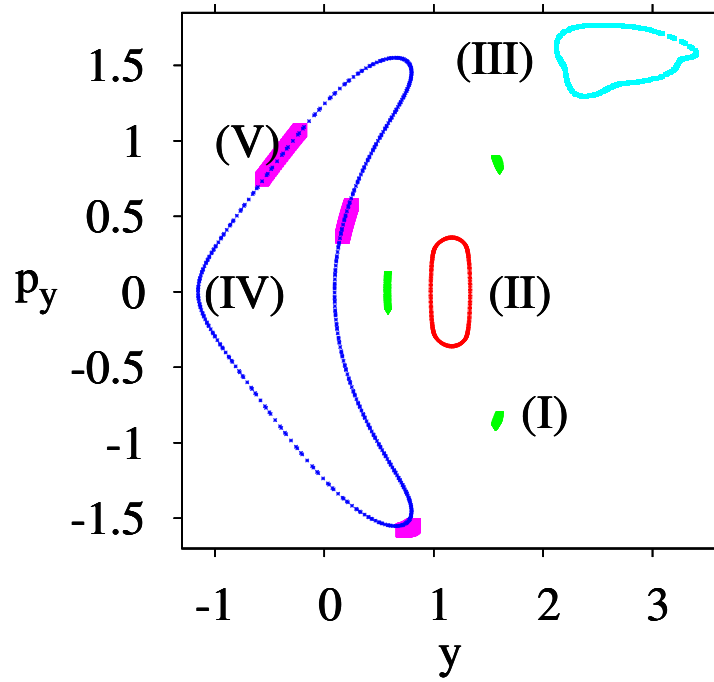


Figura 4.9: Seção de Poincaré para a função erro, para o caso de massas iguais e suavidades iguais com  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$ . Aqui temos o caso suave para  $L/\sigma_{31} = 5,0$ . Simulação de algumas trajetórias da figura (4.8).



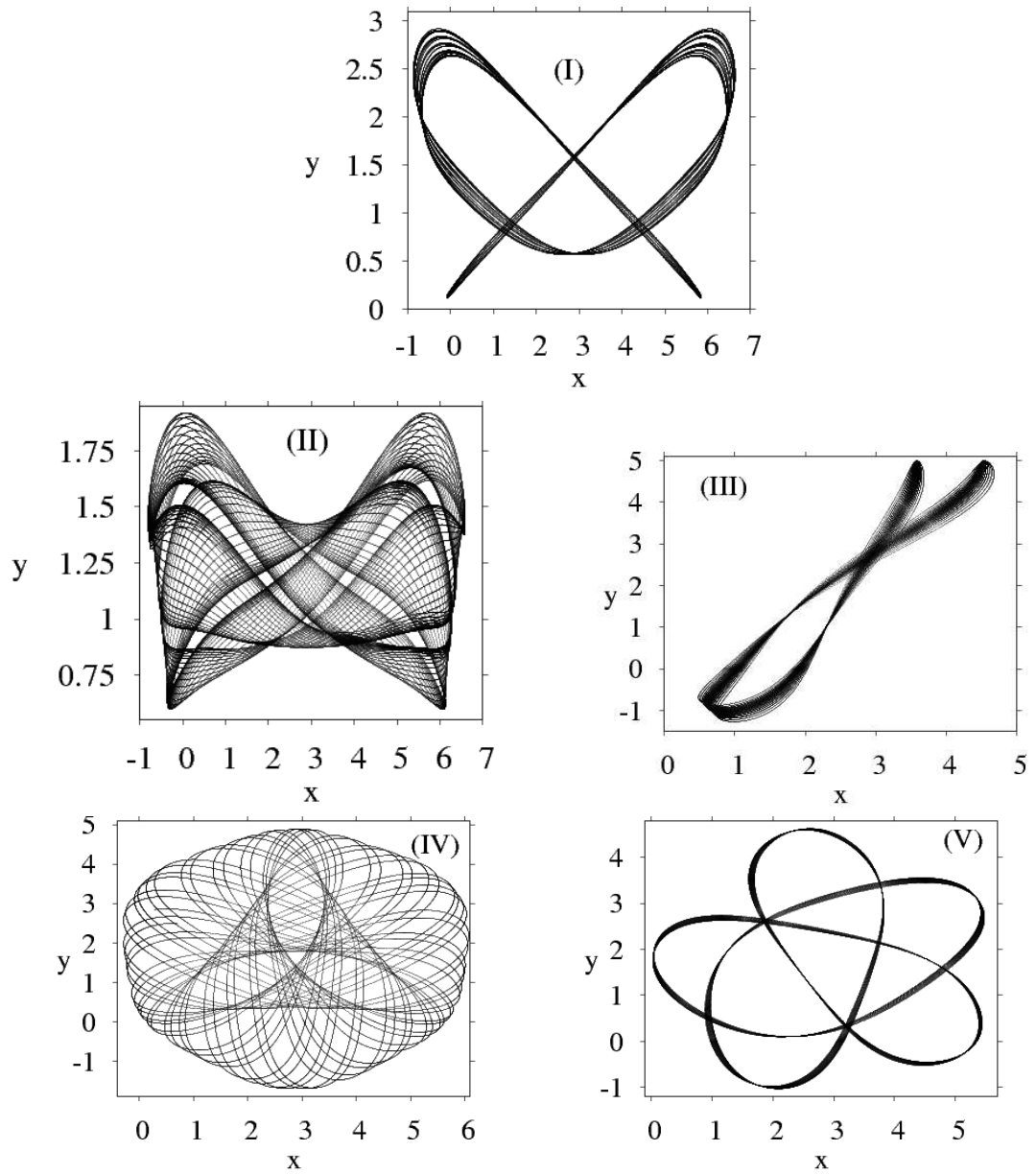


Figura 4.10: Trajetórias da partícula, dentro do bilhar, referentes a figura (4.9), mostrando as regiões de (I) a (V).

órbita. Também podemos ver que em  $y$  o sistema quase chega ter 6 pontos fixos.

A figura (4.12) apresenta seções de Poincaré para o bilhar com paredes modeladas pela função exponencial. Para todos os casos temos  $L/\sigma_{31} = 5,0$ , ou seja, paredes suaves. As suavidades são mantidas iguais, com  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$  e razão de massas são diferentes. Estas seções foram obtidas pelo mesmo método descrito anteriormente e com 400 trajetórias.

A figura (4.12) está organizada da seguinte maneira:

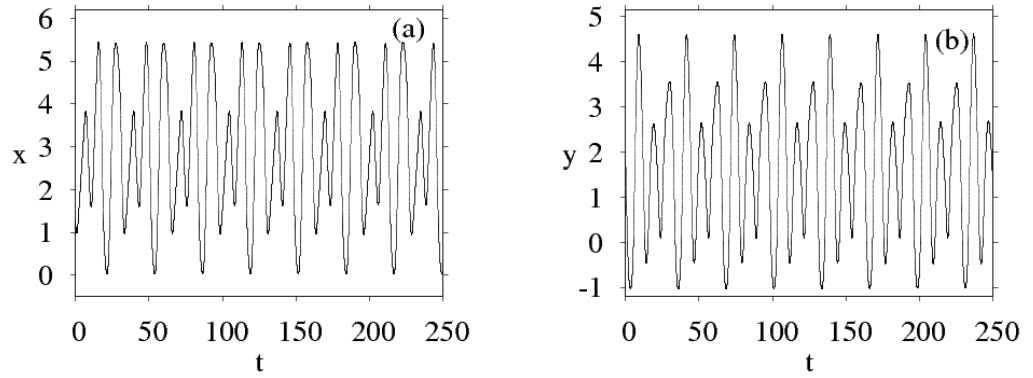


Figura 4.11: Série temporal para trajetória da figura (4.10-V). Caso de paredes suaves, com  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e tempo de evolução de  $t = 250$ , para  $(x \times t)$ , em (a) e  $(y \times t)$ , em (b).

- 1 - Na parte superior esquerda da figura (4.12), temos o caso mostrado na figura (4.6), para a função exponencial com paredes suaves, e com  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$ .
- 2 - Na parte superior direita da figura (4.12) temos a razão de massas das partículas como sendo  $\gamma_{21} = 3,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/3,0$ .
- 3 - Na parte inferior esquerda da figura (4.12) temos a razão de massas das partículas como sendo  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ .
- 4 - Na parte inferior direita, temos a razão de massas das partículas como sendo  $\gamma_{21} = 7,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/7,0$ .

As figuras (4.12) mostram que mesmo modificando os ângulos do bilhar triangular, a integrabilidade do sistema é mantida. Podemos observar que há uma transição da dinâmica do sistema. O sistema apresenta mais pontos elípticos e alguns pontos hiperbólicos para razão de massas igual a  $\gamma_{21} = 3,0$  (para simplificar falaremos apenas de  $\gamma_{21}$ ) em comparação com  $\gamma_{21} = 1,0$ . Quando  $\gamma_{21}$  assume o valor igual a  $5,0$ , os toros centrais são achatados e quase desaparecem. Estes aumentam seu tamanho quando  $\gamma_{21}$  é igual a  $7,0$ . Os dois pontos elípticos nos extremos das figuras são mantidos.

Na figura (4.13) temos as seções de Poincaré para o bilhar com paredes modeladas pela função erro. Para todos os casos temos  $L/\sigma_{31} = 5,0$ , ou seja, paredes suaves. As suavidades são mantidas iguais, com  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1,0$  e razão de massas variam. Estas seções foram obtidas pelo mesmo método descrito anteriormente e com 400 trajetórias.

A figura (4.13) está organizada da seguinte maneira:

- 1 - Na parte superior esquerda da figura (4.13), temos o caso mostrado na figura (4.8), para a função erro com paredes suaves e  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 1,0$ .
- 2 - Na parte superior direita da figura (4.13) temos a razão de massas das partículas como sendo  $\gamma_{21} = 3,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/3,0$ .
- 3 - Na parte inferior esquerda da figura (4.13) temos a razão de massas das partículas como sendo  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ .



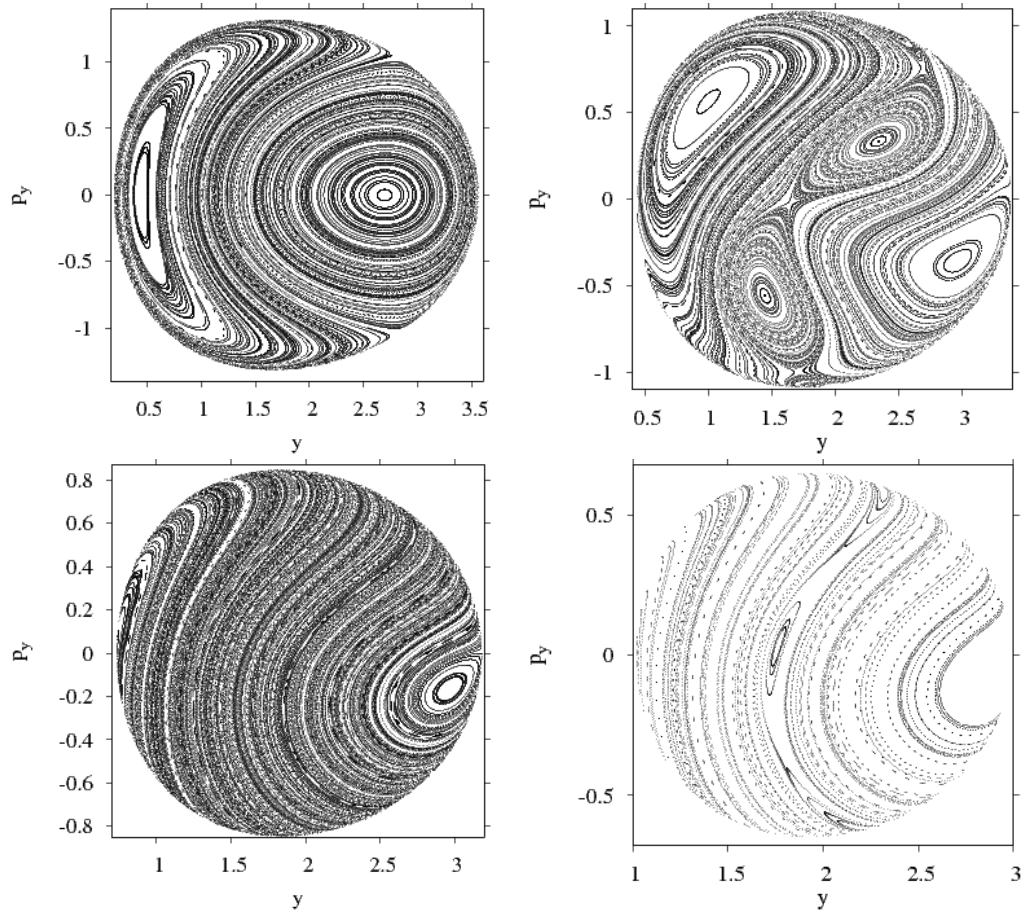


Figura 4.12: Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função exponencial. Todas as figuras tem  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e  $\gamma_{31} = 1,0$ . Na parte superior esquerda temos  $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1,0$ . Na parte superior direita temos a seção para  $\gamma_{21} = 3,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/3,0$ . Na parte inferior esquerda temos  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ . Na parte inferior direita temos  $\gamma_{21} = 7,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/7,0$ .

4 - Na parte inferior direita, temos a razão de massas das partículas como sendo  $\gamma_{21} = 7,0$ ,  $\gamma_{31} = 1,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/7,0$ .

Podemos observar nestas figuras que, mesmo para  $\gamma_{21} = 1,0$ , o sistema não é integrável. Todas as figuras apresentam comportamento misto, onde coexistem regiões caóticas e regulares no mesmo espaço de fases. Quando a forma do bilhar muda, ou seja, quando modificamos  $\gamma_{21}$  e  $\gamma_{32}$  há uma mudança de comportamento do sistema no que diz respeito aos pontos fixos e as regiões caóticas. Quando  $\gamma_{21}$  passa de  $1,0$  para  $3,0$  aumenta a área no regime caótico no espaço de fases. Os pontos fixos (elípticos) são deslocados e muitos toros são destruídos.

Quando  $\gamma_{21}$  tem valor igual a  $5,0$ , o espaço de fases claramente apresenta uma divisão em duas regiões. Esta divisão é feita por pontos elípticos e hiperbólicos que separam regiões com ilhas maiores que o caso de  $\gamma_{21} = 3,0$ . A dinâmica do sistema não muda significativamente para  $\gamma_{21} = 7,0$ .

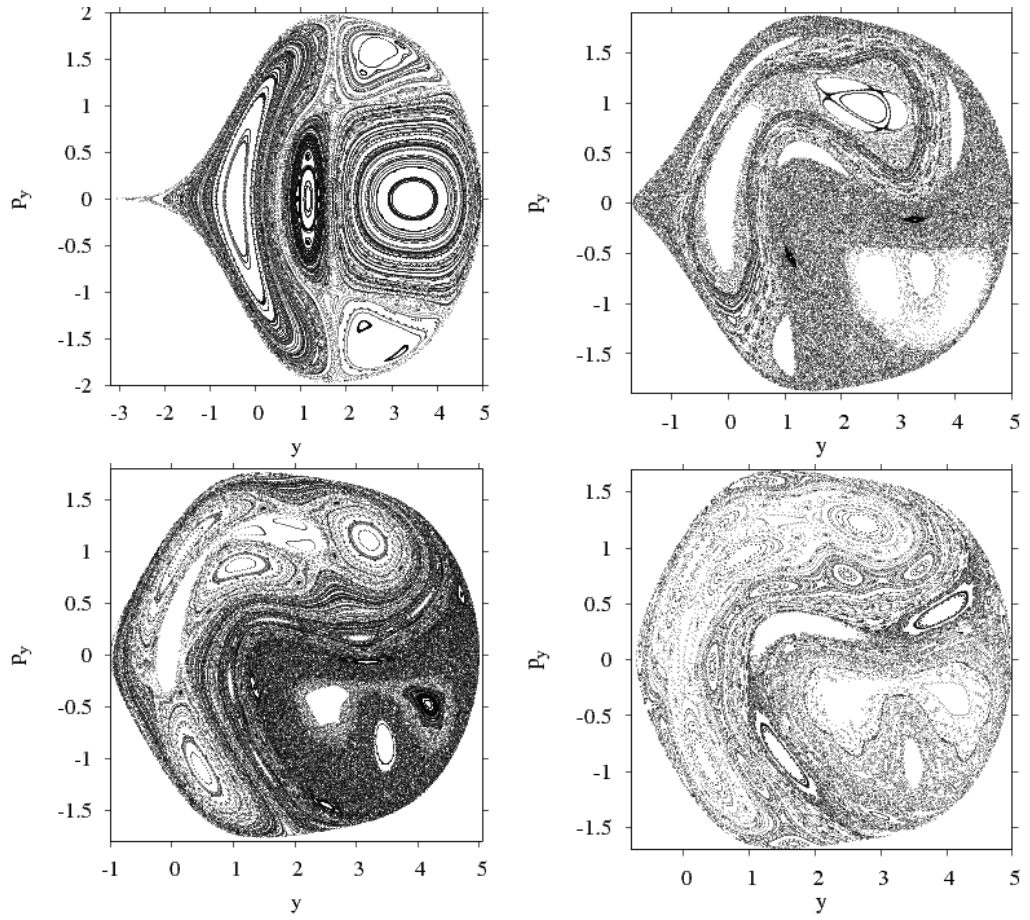


Figura 4.13: Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função erro. Todas as figuras tem  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e  $\gamma_{31} = 1,0$ . Na parte superior esquerda temos  $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1,0$ . Na parte superior direita temos a seção para  $\gamma_{21} = 3,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/3,0$ . Na parte inferior esquerda temos  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ . Na parte inferior direita temos  $\gamma_{21} = 7,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/7,0$ .

Podemos notar que a dinâmica do sistema, quando este possui paredes modeladas pela função exponencial, é integrável mesmo quando modificamos os ângulos do bilhar, no caso de paredes suaves. Isso não acontece quando a função erro é utilizada para modelar as paredes. Mesmo para razões de massas iguais o sistema possui comportamento caótico.

#### 4.2.4 Aplicação das Funções “Erro” e “Exponencial” com paredes rígidas

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos quando inserimos as funções exponencial e erro na Hamiltoniana (4.7) para o caso de paredes rígidas, com  $L/\sigma_{31} = 20, 0$ . As seções de Poincaré das figuras (4.14) e (4.15) foram construídas da mesma forma que na seção anterior.

Na figura (4.14) temos as seções de Poincaré para o bilhar com paredes modeladas pela função exponencial. Para todos os casos temos  $L/\sigma_{31} = 20, 0$ , ou seja, paredes rígidas e  $\gamma_{31} = 1, 0$ . As suavidades são mantidas iguais, com  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 1, 0$  e variamos a razão de massas  $\gamma_{i,j}$ . Estas seções foram obtidas através de 400 condições iniciais.

A figura (4.14) está organizada da seguinte maneira:

- 1 - Na parte superior esquerda, temos o caso com  $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1, 0$ .
- 2 - Na parte superior direita temos a razão de massas das partículas como sendo  $\gamma_{21} = 3, 0$ ,  $\gamma_{32} = 1, 0/3, 0$ .
- 3 - Na parte inferior esquerda temos  $\gamma_{21} = 5, 0$ ,  $\gamma_{32} = 1, 0/5, 0$ .
- 4 - Na parte inferior direita, temos  $\gamma_{21} = 7, 0$ ,  $\gamma_{32} = 1, 0/7, 0$ .

Podemos observar na figura (4.14), superior esquerda, que mesmo para  $L/\sigma_{31} = 20, 0$ , o sistema é integrável. Quando aumentamos o valor de  $\gamma_{21}$  para  $3, 0$ , a integrabilidade é quebrada e regiões caóticas aparecem no espaço de fases, como pode ser observado na figura (4.14) superior a direita. Apenas alguns toros sobrevivem a essa modificação ao ângulo do bilhar. Outras ilhas ressurgem quando aumentamos o valor de  $\gamma_{21}$  para  $5, 0$  e  $7, 0$ , como pode ser observado nas figuras (4.14) inferiores.

Na figura (4.15) temos as seções de Poincaré para o bilhar com paredes modeladas pela função erro. Seguimos o mesmo critério aqui de manter  $L/\sigma_{31} = 20, 0$ , ou seja, paredes rígidas e  $\gamma_{31} = 1, 0$ . Para todas as figuras em (4.15) o sistema apresenta comportamento quase totalmente caótico. Poucas ilhas de movimento regular podem ser vistas. O caso em que a área no espaço de fases é claramente visível é para  $\gamma_{21} = 1, 0$ , na figura superior esquerda de (4.15). O potencial do erro apresenta diversas ilhas espalhadas pelo mar caótico, indicando diferentes regimes de regularidade no movimento.



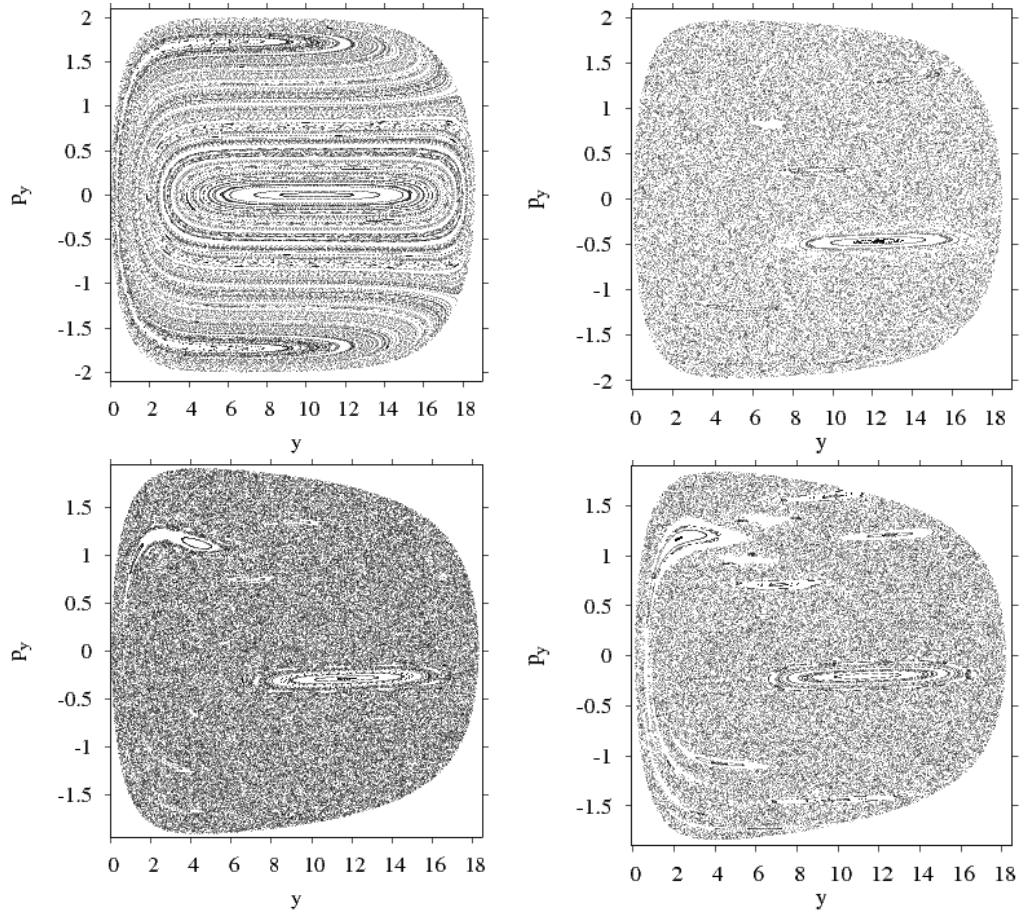


Figura 4.14: Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função exponencial. Todas as figuras tem  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e  $\gamma_{31} = 1,0$ . Na parte superior esquerda temos  $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1,0$ . Na parte superior direita temos a seção para  $\gamma_{21} = 3,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/3,0$ . Na parte inferior esquerda temos  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ . Na parte inferior direita temos  $\gamma_{21} = 7,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/7,0$ .

### 4.3 Discussão dos resultados

Neste capítulo apresentamos um estudo do sistema de três partículas sobre um anel sem atrito com interações que variam de suaves a rígidas. Mostramos analiticamente que, com uma transformação adequada de coordenadas, o sistema pode descrever um sistema contendo uma partícula num bilhar triangular, e qualquer potencial de interação (da paredes) pode ser utilizado. O potencial, que representa as paredes do bilhar, apresenta parâmetros que controlam a suavidade das paredes e os ângulos do triângulo, dados por  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  e  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{32}$ ,  $\gamma_{31}$ , respectivamente.

As grandezas  $\gamma_{i,j}$  são a razão de massas entre as partículas  $i$  e  $j$  e elas controlam os ângulos do bilhar. Os parâmetros  $\sigma_{i,j}$  controlam a suavidade das paredes. Neste trabalho mantemos  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{31}$  iguais a 1,0. O controle da suavidade é feito através do termo  $L/\sigma_{31}$  presente nos potenciais das Hamiltonianas do sistema. Como

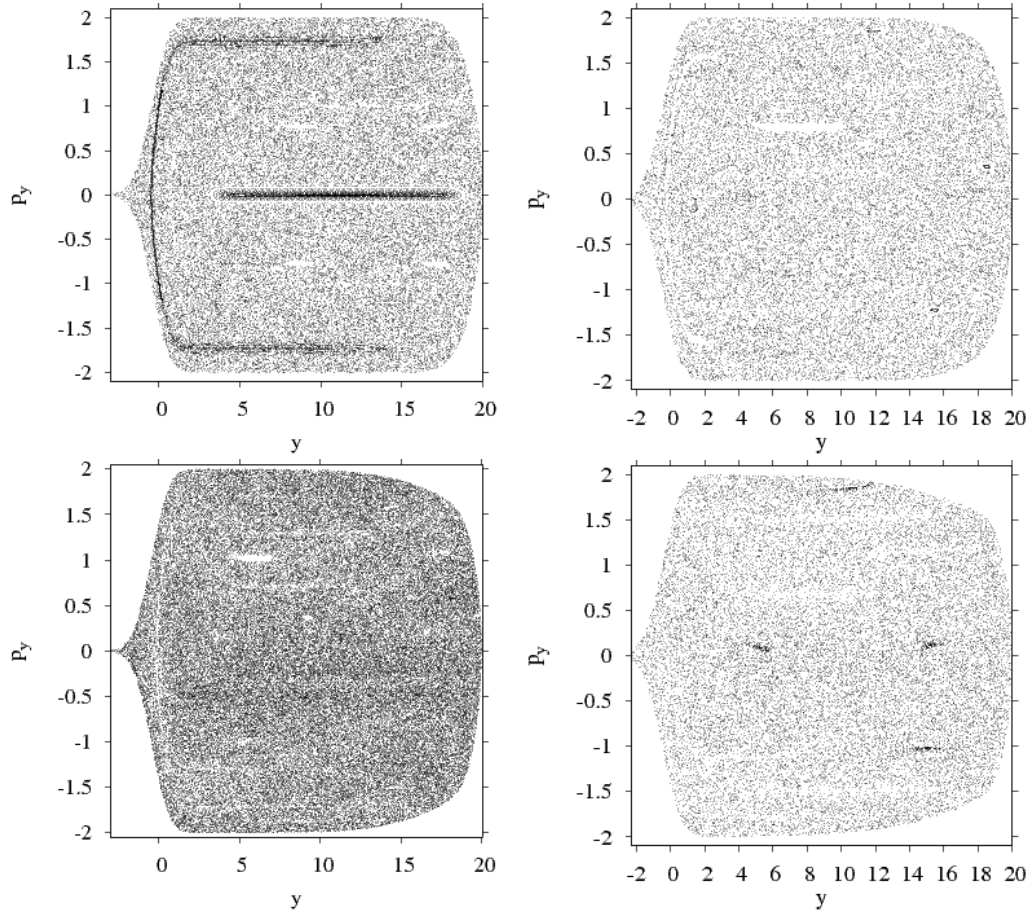


Figura 4.15: Seção de Poincaré do bilhar triangular utilizando o potencial da função erro. Todas as figuras tem  $L/\sigma_{31} = 5,0$  e  $\gamma_{31} = 1,0$ . Na parte superior esquerda temos  $\gamma_{21} = \gamma_{32} = 1,0$ . Na parte superior direita temos a seção para  $\gamma_{21} = 3,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/3,0$ . Na parte inferior esquerda temos  $\gamma_{21} = 5,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/5,0$ . Na parte inferior direita temos  $\gamma_{21} = 7,0$ ,  $\gamma_{32} = 1,0/7,0$ .

$\sigma_{31}$  é igual a  $1,0$ , quem controla a suavidade da parede é a grandeza  $L$ , que originalmente descreve o comprimento da circunferência do anel. Com a transformação de coordenadas do sistema, de um anel para um triângulo,  $L$  é o comprimento dos lados do triângulo. Dessa forma quando  $L \rightarrow \infty$  as paredes do bilhar tornam-se rígidas.

Estudos com bilhares usualmente tratam a interação das partículas com as paredes como sendo rígidas e estas são representadas por funções delta. Neste trabalho procuramos descrever a natureza de forma mais realista, onde esta apresenta potenciais suaves. Isso é feito utilizando as funções Exponencial e Erro para descrever as paredes. Numericamente é feito o estudo do comportamento dinâmico do sistema quando temos dois casos distintos: um com paredes suaves, para  $L = 5,0$  e outro para paredes rígidas, com  $L = 20,0$ .

Seções de Poincaré do sistema são obtidas para ambos os casos. A razão de massas entre as partículas também é modificada. De maneira mais precisa, mantemos

$m_1 = m_3 = 1, 0$  e variamos  $m_2$  em quatro casos:  $m_2 = 1, 0$ ,  $m_2 = 3, 0$ ,  $m_2 = 5, 0$  e  $m_2 = 7, 0$ .

Observamos que, para o caso de paredes suaves ( $L = 5, 0$ ), com diferentes razões de massas o sistema é integrável quando utilizamos a função exponencial. Este resultado numérico comprova que as condições de integrabilidade encontradas originalmente por Toda *et al.* [62] são válidas apenas quando uma função exponencial é usada.

Quando aumentamos o tamanho do bilhar para a função exponencial, o sistema ainda é integrável para  $\gamma_{21} = 1, 0$ . Para outras razões de massas o sistema tem comportamento misto, ou seja, apresenta regiões de movimento regular e regiões de movimento caótico coexistindo no mesmo espaço de fases. Pode-se visualizar que existem pontos elípticos (pontos estáveis) e pontos hiperbólicos (pontos instáveis) no sistema.

Quando modificamos a função que modela as paredes para a função erro, o sistema não apresenta integrabilidade. Mesmo para  $L = 5, 0$  e massas iguais das partículas o sistema possui comportamentos caóticos e regulares no mesmo espaço de fases. Podemos observar diversos pontos elípticos e pontos hiperbólicos e a transição de regimes de menor para maior grau de caoticidade. Portanto, mesmo no caso de paredes rígidas  $L/\sigma_{31} \rightarrow \infty$  pequenas mudanças na função do potencial de interação podem mudar drasticamente a natureza da dinâmica.

Pelas seções de Poincaré, podemos notar que quanto mais suave são as paredes mais regular é a dinâmica do sistema. Neste contexto, podemos dizer que o potencial descrito pela função exponencial apresenta maior suavidade, e podemos dizer maior regularidade, do que a função erro, por apresentar um comportamento totalmente regular quando temos parâmetros idênticos as duas funções.

# Capítulo 5

## Conclusões

Sistemas físicos reais possuem paredes (potenciais) e interações entre as partículas suaves. No entanto, muitos trabalhos consideram apenas paredes rígidas e interações pontuais [7, 9, 62]. Diversas geometrias de bilhares foram estudadas na busca de padrões em suas dinâmicas. Bilhares como o bilhar de Sinai [5], o estádio de Bunimovich [6] e o bilhar em forma de cogumelo [48], mostram dinâmicas caóticas. Todos esses sistemas consideravam interações entre partícula-partícula e partícula-paredes como sendo pontuais e rígidas, de forma que essas interações eram representadas por um potencial delta  $\delta(x)$ .

Apesar desses trabalhos mostrarem aspectos interessantes da dinâmica de bilhares, eles não possuem uma descrição muito realista dos sistemas físicos. Para tal é preciso incluir interações de curto e longo alcance entre as partículas e forças suaves de interação entre partículas e paredes. Um trabalho recente [22] estudou um bilhar com paredes suaves utilizando uma parede modelada pela função erro ( $\text{erf}(x)$ ). Oliveira *et al.* mostraram que a dinâmica de um bilhar unidimensional apresenta um número maior de ilhas no espaço de fases quando as paredes tornam-se suaves.

Nesta tese buscamos generalizar a função que modela as paredes dos bilhares através de degraus. Também é analisado o comportamento do sistema quando introduzimos potenciais de interação suaves entre as partículas.

Neste trabalho analisamos a dinâmica, no espaço de fases e tangente, de duas partículas interagentes aprisionadas num bilhar unidimensional. As paredes do bilhar são modeladas por degraus de forma que, quando o número de degraus aumenta significativamente, qualquer função possa ser obtida. A interação entre as partículas é dada por forças constantes repulsivas, consequentemente os potenciais de interação dependem apenas da posição das partículas.

São obtidas expressões analíticas para o espaço de fases e tangente do sistema, que relacionam os estados inicial e final do bilhar. Multiplicando as matrizes do espaço tangente, em certa ordem, podemos encontrar a matriz final do sistema, chamada de matriz Monodrômica e com ela podemos calcular seus autovalores. Os



autovalores são úteis para se obter os expoentes de Lyapunov, que revelam características importantes sobre a dinâmica do sistema, como o grau de caoticidade. Como visto em trabalhos anteriores, as armadilhas dinâmicas levam o sistema a um movimento regular gerando ilhas de regularidade no espaço de fases. A coexistência de ilhas e do mar caótico é uma característica dos sistemas Hamiltonianos.

As matrizes monodrômicas, do formalismo com e sem interação entre as partículas, mostram que quando não há interação entre as partículas, seus autovalores são iguais a  $\pm 1$ , consequentemente obtemos expoentes de Lyapunov iguais a zero. Quando o sistema é submetido a forças constantes, há o aparecimento de elementos na matriz que levam a autovalores diferentes de  $\pm 1$ , consequentemente obtém-se expoentes de Lyapunov positivos. Esses valores positivos indicam um comportamento caótico do sistema.

Numericamente obtemos as seções de Poincaré para 150 trajetórias e diferentes valores de interação entre as partículas e diferentes alturas dos degraus. Quando o bilhar é composto apenas por paredes rígidas, sem degraus, o espaço de fases apresenta a coexistência de ilhas separadas por um regime caótico. Quando introduzimos um degrau de cada lado do bilhar, regiões proibidas surgem no espaço de fases. Conforme a intensidade deste degrau aumenta, maior fica a região proibida. Quando modificamos a força de interação partícula-partícula, as regiões proibidas voltam a ser habitadas e há apenas dois grandes blocos com ilhas. Podemos observar duas regiões com maior densidade de pontos, no comportamento caótico, sobre os degraus e perto da parede indicando o aparecimento das duplas colisões entre partícula-partícula e partícula-parede. Os comportamentos citados nos resultados analíticos e verificados numericamente, ocorrem devido a interação entre as partículas e ao grau de suavidade das paredes, em nosso caso os degraus.

O expoente de Lyapunov máximo a tempo finito foi obtido numericamente para paredes com um, dois e três degraus. Observamos que com o aumento dos degraus o sistema torna-se mais regular.

A transição de interação, de suaves para rígidas, entre três partículas num anel sem atrito é discutido numa segunda parte do trabalho. Eles são uma generalização de duas partículas com interação suave discutidas em [22]. Usualmente interações rígidas e pontuais são modeladas por um potencial  $\delta$ , para o qual as equações de movimento não são bem definidas. Nós propusemos potenciais adequados para estudar a transição de interação de suave a rígida, onde as forças, não os potenciais, tornam-se funções delta ( $\delta$ ) no limite de interações rígidas.

Uma Hamiltoniana escalonada é obtida e mostra muito bem a transição de suave para rígida, nos dando pistas gerais sobre as propriedades relevantes das interações entre as partículas. Observamos que a dinâmica depende apenas das razões de massas entre as partículas e da razão de suavidades de interações, sendo independente do tipo de interação (função do potencial). Qualquer potencial de interação com um parâmetro de controle de suavidade pode ser usado nesta Hamiltoniana que define um bilhar triangular suave no qual toda a dinâmica ocorre.



Um bilhar com potencial de Toda, onde os potenciais são definidos por funções exponenciais, com parâmetros de suavidades, como interação entre as partículas, e razão de massas iguais é integrável [62]. Razão de massas iguais com outro potencial de interação, como o da função erro, geram dinâmica caótica. Os resultados mostram que os potenciais, com as funções exponencial e erro, são apropriados e não apresentam divergências numéricas quando se aproximam do limite de interações rígidas.

O estudo da dinâmica de bilhares com muitos degraus é uma perspectiva de trabalho futuro, de forma que possamos modelar qualquer função. Podemos ainda verificar como se comporta a dinâmica de bilhares com outras geometrias de bilhares, como bilhar de cogumelo, e outros bilhares bidimensionais, quando as paredes são modeladas por degraus ou com paredes suaves.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems*, Maryland: Cambrige University Press, (1993).
- [2] Schelin, A. B.; Caldas, I. L., Viana, R. L.; Benkadda, S., *Phys. Lett. A*, v. 376, p. 24, (2011).
- [3] Poincaré, H., *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, [S.I.]: Gauthier-Vilars, (1899).
- [4] Henon, M.; Heiles, C., *The Astronomical Journal*, v. 69, n. 1, p. 73, (1964).
- [5] Sinai, I. G., *Func. Anal. Appl.*, v. 2, p. 61, (1968).
- [6] Bunimovich, L. A., *Func. Anal. Appl.*, v. 8, p. 254, (1974).
- [7] Casati, G.; Ford, J., *J. Comp. Phys.*, v. 20, p. 97, (1976).
- [8] Meza-Montes, L.; Ulloa, S. E., *Phys. Rev. E*, v. 55, p. 6319, (1997).
- [9] Manchein, C.; Beims, M. W.; Rost, J. M., *Phys. Rev. E*, v. 76, p. 56203, (2007).
- [10] Zaslavsky, G. M., *Phys. Rep.*, v. 371, p. 461, (2002).
- [11] Karney, C. F. F., *Physica D*, v. 8, p. 360, (1983).
- [12] Altmann, E. G., *Phys. Rev. E*, v. 64, p. 026201, (2001).
- [13] Crisant, A.; Paladin, G.; Vulpiani, A., *Products of random matrices in Statistical Physics*, Springer-Verlag, Heidelberg, (1993).
- [14] Glashow, L.; Mittag, J., *J. Stat. Phys.*, v. 87, p. 937, (1997).
- [15] Cox, G.; Ackland, G. J., *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 2362, (2000).
- [16] Casati, G.; Prosen, T., *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4729, (1999).
- [17] Kornfeld, P.; Fomin, S. V.; Sinai, Y. G., *Ergodic Theory*, Springer, Berlin, (1982).
- [18] Cipriani, P.; Denison, S.; Politi, A., *Phys. Rev. Lett.*, v. 94, p. 244301, (2005).

- [19] Andreasen, J.; Cao, H.; Wiersing, J.; Motter, A. E., *Phys. Rev. Lett.*, v. 103, p. 154101, (2009).
- [20] Vallejos, R. O.; Lewenkopf, C. H.; Mucciolo, E. R., *Phys. Rev. B*, v. 60, p. 13682, (1999).
- [21] Marlow, C. A.; Taylor, R. P.; Martin, T. P.; Scannell, B. C.; Linke, H.; Fairbanks, M. S.; Hall, G. D. R.; Shorubalko, I.; Samuelson, L.; Fromhold, T. M.; Brown, C. V.; Hackens, B.; Faniel, S.; Gustin, C.; Bayot, V.; Wallart, X.; Bollaert, S.; Cappy, A. *Phys. Rev. B*, v. 73, p. 195318, (2006).
- [22] Oliveira, H. A.; Manchein, C.; Beims, M. W., *Phys. Rev. E*, v. 78, p. 046208, (2008).
- [23] Dellago, C.; Posch, H. A.; Hoover, W. G. , *Phys. Rev. E*, v. 53, n. 2, p. 1485, (1996).
- [24] Benettin, G.; Galgani, L.; Giorgilli, A.; Strelcyn; J.-M., *Meccanica*, v.15, n. 9, p. 9, (1980).
- [25] Wolf, A.; Swift, J. B.; Harry, L.; Swinney, H. L.; Vastano, J. A., *Physica D*, v. 16, p. 285, (1986).
- [26] Monteiro, L. H. A., *Sistemas Dinâmicos.*, Livraria da Física, São Paulo, Ed. 2, (2006).
- [27] Lemos, N. A., *Mecânica Analítica*, Livraria da Física, São Paulo, (2000).
- [28] Goldstein, H., *Classical Mechanics. Massachusetts*, Addison-Wesley, (1969)
- [29] Ferrara, N. F.; Prado, C. P. C., *Caos - Uma introdução*, 3ª edição, ed. Edgard Blucher LTDA., São Paulo, (1994).
- [30] Devaney, R. L., *A First Course in Chaotic Dynamical System*, Perseus Book, (1992).
- [31] Arnold, V. I., *Uspekhi Math. Nauk.*, v. 18, p. 13, (1963).
- [32] Moser, J., *Nach. Akad. Wiss. Gottingen II Math. Phys.*, v. 1, p. 1, (1962).
- [33] Kolmogorov, A. N., *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, v. 98, p. 527, (1954).
- [34] Zaslavsky, G. M., *Physica D*, v. 168, p. 292, (2002).
- [35] Meiss, J. D.; Ott, E., *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, p. 2741, (1979).
- [36] Haken, H., *Phys. Lett. A*, v. 94, p. 71, (1983).
- [37] Rössler, O. E., *Phys. Rev. Lett.*, v. 71, p. 155, (1979).

- [38] Jia, Q., *Phys. Lett. A*, v. 366, p. 217, (2007).
- [39] Tam, L. M.; Chen, J. H.; Chen, H. K.; Tou, W. M. S., *Chaos Soliton Fractals*, v. 38, p. 826, (2008).
- [40] Birkhoff, G., *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, (1927).
- [41] Krylov, A. S., *Works on the Foundations of Statistical Physics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, (1979).
- [42] Vivaldi, F.; Casati, G.; Guarneri, I., *Phys. Rev. Lett.*, v. 51, n. 9, (1983).
- [43] Borgonovi, F.; Casati, G.; Baowen, L., *Phys. Rev. Lett.*, v. 77, n. 23, (1996).
- [44] Nagler, J.; Krieger, M.; Linke, M.; Schonke, J.; Wiersig, J., *Phys. Rev. E*, v. 75, p. 046204, (2007).
- [45] Howard, J. E., *Math. Prob. Eng.*, v. 2009, ID. 531024, p. 10, (2009).
- [46] Robnik, M., *J. Phys. A*, v. 16, p. 3971, (1983).
- [47] Bunimovich, L. A., *Chaos*, v. 11, p. 802, (2001).
- [48] Altmann, E. G.; Motter, A. E., *Chaos*, v. 15, p. 033105, (2005).
- [49] Altmann, E. G.; Friedrich, T.; Motter, A. E.; Kantz, H.; Richter, A., *Chaos*, v. 77, p. 016205, (2008).
- [50] Leonel, E. D.; Oliveira, D. F. M.; Loskutov, A. , *Chaos*, v. 19, p. 033142, (2009).
- [51] Custódio, M.; Beims, M. W., *Phys. Rev. E*, v. 83, p. 056201, (2011).
- [52] Xavier, E. P. S.; Santos, M. C.; Silva, L. G. G. V. D.; Luz, M. G. E. da; Beims, M. W., *Physica A*, v. 342, p. 377, (2004).
- [53] Zharnitsky, V., *Phys. Rev. Lett.*, v. 75, n. 24, (1995).
- [54] Reed, M. A.; Kirk, W. P., *Nanostructure and Fabrication*, Academic, Boston, (1997).
- [55] Szezech, J. D.; Lopes, S. R.; Viana, R. L. , *Phys. Let. A*, n. 335, p. 394-401, 2005.
- [56] Turaev, D.; Rom-Kedar, V., *Nonlinearity*, v. 11, p. 575, (1998).
- [57] Rom-Kedar, V.; Turaev, D., *Physica D*, v. 130, p. 187, (1999).
- [58] Turaev, D.; Rom-Kedar, V., *J. Stat. Phys.*, v. 112, p. 765, (2003).
- [59] Grassberger, P.; Nadler, W.; Yang, L., *Phys. Rev. Lett.*, v. 89, p. 180601, (2002).

- [60] Gorin, T., *J. Math. Phys.*, v. 34, p. 8281, (2001).
- [61] Gutkin, E., *Comm. Math. Phys.* v. 143, n. 3, p. 431, (1992).
- [62] Toda, M., *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, v. 45, p. 174, (1970).